

Espaces préhilbertiens réels : révision PCSI + programme PC

Questions de cours

1. Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme (c'est la définition).
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.
2. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^T A = I_n$ (c'est la définition).
Interprétation en termes de colonnes et de lignes.
3. Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien (donner la définition).
Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
4. Énoncé du théorème spectral (rappel : preuve non exigible) On donnera une version endomorphisme + une version matrice.
5. Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.
Caractérisation spectrale.
6. Matrice symétrique positive, définie positive.
Caractérisation spectrale.

Endomorphismes des espaces euclidiens

Cette section vise les objectifs suivants :

- consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces préhilbertiens réels;
- étudier isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques;
- approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral;
- introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.

Pour les applications courantes en dimension trois, on peut au besoin recourir au produit vectoriel, déjà introduit et connu des étudiants dans l'enseignement des sciences physiques notamment.

La notion d'adjoint est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.
Groupe orthogonal.

Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions.

Notation $O(E)$.

On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

b) Matrices orthogonales

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^T A = I_n$.

Interprétation en termes de colonnes et de lignes.

Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.

Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.

On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».

Groupe orthogonal.

Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$.

Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.

Notations $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$.

Orientation. Bases orthonormées directes.

c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Description des matrices de $O_2(\mathbb{R})$, de $SO_2(\mathbb{R})$.

Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.

On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.

Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

d) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien.

Notation $\mathcal{S}(E)$.

Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.

Caractérisation des projecteurs orthogonaux.

On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».

Théorème spectral :

tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

La démonstration n'est pas exigible.

Forme matricielle du théorème spectral.

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.

Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$.

Matrice symétrique positive, définie positive.

Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
