Intégration : révision de PCSI + programme de PC
Le programme est très souple sur les hypothèses des théorèmes d'intégration, j'attends toutefois de mes élèves qu'ils connaissent les hypothèses précises des théorèmes utilisés.

Intégration sur un intervalle quelconque

Cette section vise les objectifs suivants :
- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;*
- *compléter la section dédiée aux suites et aux séries de fonctions par les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme ;*
- *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si f est continue sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I = [a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).
Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est continue, intégrable et positive sur I, et si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f. – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque. Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.
Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, – intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ; – étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$.	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Théorème de convergence dominée : si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et : $$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème de continuité : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Théorème de convergence dominée à paramètre continu: si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que : – pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors ℓ est intégrable sur I et : $$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.$$	On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.
Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour $0 \leqslant j < k$.	
	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.