

EVN + révision PCSI intégration

Attention : le cours est terminé sur le chapitre EVN, mais premier TD mercredi seulement.

Donner un ou plusieurs exercices simples sur le chapitre espaces vectoriels normés, et compléter si besoin par un exercice de révision de PCSI (intégration sur un segment) pour préparer le chapitre suivant.

Question de cours éventuelle :

1. Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
2. Une boule fermée (resp. ouverte) est convexe.
3. Une boule ouverte est ouverte.
4. Une boule fermée est fermée.
5. Caractérisation séquentielle de l'adhérence.
6. Caractérisation séquentielle de la limite.
7. En dimension finie, une application linéaire est continue.
8. L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.

Espaces vectoriels normés

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Normes

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe.
Espace vectoriel normé.
Norme associée à un produit scalaire sur un espace pré-hilbertien réel.

Normes usuelles $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur \mathbb{K}^n .
Norme $\| \cdot \|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{K} .
L'égalité $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour A partie non vide de \mathbb{R} et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.

Distance associée à une norme.
Boule ouverte, boule fermée, sphère.
Partie convexe.
Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.

Convexité des boules.

b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Convergence et divergence d'une suite.
Unicité de la limite. Opérations sur les limites.
Une suite convergente est bornée.
Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.

c) Comparaison des normes

Normes équivalentes.

Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.
Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.
La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.

d) Topologie d'un espace vectoriel normé

Point intérieur à une partie.
Ouvert d'un espace normé.
Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.
Fermé d'un espace normé.

Une boule ouverte est un ouvert.

Caractérisation séquentielle.
Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.

Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.
Point adhérent à une partie, adhérence.

L'adhérence est l'ensemble des points adhérents.
Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.

Partie dense.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

e) Limite et continuité en un point

Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.

Caractérisation séquentielle.

Opérations algébriques sur les limites, composition.

Continuité en un point.

Caractérisation séquentielle.

f) Continuité sur une partie

Opérations algébriques, composition.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Si f est une application continue de E dans \mathbb{R} alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geq 0$ sont des fermés.

Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.

g) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie.

La démonstration est hors programme.

La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

La démonstration est hors programme.

Théorème des bornes atteintes :

toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.

La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.