

**Algèbre linéaire**

Dans toute cette partie,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices**

## CONTENUS

## CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

**a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels**

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition  $E = \bigoplus E_i$ .

Si  $F_1, \dots, F_p$  sont des sous-espaces de dimension finie,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

**b) Matrices par blocs et sous-espaces stables**

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Si  $u$  et  $v$  commutent alors le noyau de  $u$  est stable par  $v$ .

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

**c) Trace**

Trace d'une matrice carrée.

Linéarité, trace d'une transposée.

Relation  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Notation  $\text{tr}(A)$ .

**d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées**

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Polynôme annulateur.

Deux polynômes de l'endomorphisme  $u$  commutent.

Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.

Relation  $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ .

Application au calcul de l'inverse et des puissances.

Le noyau de  $P(u)$  est stable par  $u$ .

**e) Interpolation de Lagrange**

Base de  $\mathbb{K}_n[X]$  constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en  $n + 1$  points distincts de  $\mathbb{K}$ .

Déterminant de Vandermonde.

Expression d'un polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  dans cette base.

La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en  $n + 1$  points est le polynôme constant égal à 1.

Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.