| |
|---|
| Séries entières : tout.<br>Espaces euclidiens : le cours est terminé mais peu d'exercices auront été corrigés, ne pas être trop ambitieux sur cette partie. |

## Endomorphismes des espaces euclidiens

*Cette section vise les objectifs suivants :*
- *consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces préhilbertiens réels ;*
- *étudier isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.*

*Pour les applications courantes en dimension trois, on peut au besoin recourir au produit vectoriel, déjà introduit et connu des étudiants dans l'enseignement des sciences physiques notamment.*
*La notion d'adjoint est hors programme.*

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien** | |
| Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.<br>Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée. | Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions. |
| Groupe orthogonal. | Notation $\mathrm{O}(E)$.<br>On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. |
| Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. | |
| **b) Matrices orthogonales** | |
| Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$. | Interprétation en termes de colonnes et de lignes.<br>Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée. |
| Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. | On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ». |
| Groupe orthogonal. | Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$. |
| Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.<br>Orientation. Bases orthonormées directes. | Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$. |
| **c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien** | |
| Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.<br>Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. | Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.<br>On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls. |
| Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien. | |
| **d) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles** | |
| Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. | Notation $\mathcal{S}(E)$.<br>Caractérisation des projecteurs orthogonaux. |
| Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. | On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ». |
| Théorème spectral :<br>tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres. | La démonstration n'est pas exigible.<br>Forme matricielle du théorème spectral. |
| Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. | Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$. |
| Matrice symétrique positive, définie positive. | Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. |

**C - Séries entières**

*Les objectifs de cette section sont les suivants :*
*– étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
*– étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;*
*– établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*
*Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités.*

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Rayon de convergence** | |
| Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. | |
| Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe $z$ tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. | |
| Rayon de convergence $R$ défini comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des réels positifs $r$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée. | La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$. |
| Intervalle ouvert de convergence. | |
| Disque ouvert de convergence. | |
| Avec $R_a$ (resp. $R_b$) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) : | Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$. |
| – si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$ ; | Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$. |
| – si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$. | |
| Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. | La limite du rapport $\dfrac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}$ peut être directement utilisée. |
| Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières. | |
| **b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle** | |
| Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. | |
| Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence. | L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme. |
| Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence. | Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$. |
| Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme. | |
| Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme. | |
| **c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle** | |
| Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$. | |
| Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. | Formule de Taylor avec reste intégral. |
| Unicité du développement en série entière. | |
| Développements des fonctions usuelles. | Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise. |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| **d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe** | |
| Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence. | La démonstration est hors programme. |
| Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert. | |
| Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. | |