

Suites et séries de fonctions : tout (pas encore de séries entières)

Pas de colles la semaine suivante (à part les reports éventuels), bonnes fêtes de fin d'année à tous.

B - Suites et séries de fonctions

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.

La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Utilisation d'une majoration uniforme de $|f_n(x)|$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$.

La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité de la limite d'une suite de fonctions :

si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I , alors f est continue sur I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions :

si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :

si une suite (f_n) de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f , et si la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = g$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension aux suites de fonctions de classe \mathcal{C}^k , sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leq j < k$.

c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme d'une série de fonctions :

si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I , alors sa somme est continue sur I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de la double limite :

si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n , f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

La démonstration est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment :

si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Dérivation de la somme d'une série de fonctions :

si une série $\sum f_n$ de classe \mathcal{C}^1 converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension à la classe \mathcal{C}^k sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Théorème de convergence dominée :

si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n , alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

Théorème d'intégration terme à terme :

si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I , et si la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

La démonstration est hors programme.

On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.