

La colle porte principalement sur le chapitre espaces vectoriels normés. Toutefois, en vue de préparer le prochain chapitre (intégrales généralisées) déjà commencé (mais pas encore fait de TD), on peut proposer en complément un exercice simple d'intégration.

## Espaces vectoriels normés

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>a) Normes</b>	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace pré-hilbertien réel.	Normes usuelles $\  \cdot \ _1$ , $\  \cdot \ _2$ et $\  \cdot \ _\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ . Norme $\  \cdot \ _\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$ . L'égalité $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour $A$ partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère. Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	Convexité des boules.
<b>b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé</b>	
Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
<b>c) Comparaison des normes</b>	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.
<b>d) Topologie d'un espace vectoriel normé</b>	
Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie. Fermé d'un espace normé.	Une boule ouverte est un ouvert.  Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.
Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque. Point adhérent à une partie, adhérence.	L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.
Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	
<b>e) Limite et continuité en un point</b>	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Opérations algébriques sur les limites, composition. Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.  Caractérisation séquentielle.
<b>f) Continuité sur une partie</b>	
Opérations algébriques, composition.	

## CONTENUS

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.

## CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

Si  $f$  est une application continue de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  alors l'ensemble défini par  $f(x) > 0$  est un ouvert et les ensembles définis par  $f(x) = 0$  ou  $f(x) \geq 0$  sont des fermés.

---

**g) Espaces vectoriels normés de dimension finie**

---

Équivalence des normes en dimension finie.

La démonstration est hors programme.

La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

La démonstration est hors programme.

Théorème des bornes atteintes :  
toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.

La notion de norme subordonnée est hors programme.  
Exemples du déterminant, du produit matriciel.