①

CORRECTION : Mouvement d'une perle sur un cerceau

A1. Le système constitué de la perle a un seul degré de liberté : θ.

Par connaître le mouvement de M, une seule équation différentielle sera suffisante.

A2. Dans le référentiel R' non galiléen, bilan des forces s'appliquant sur M :

(vraies forces)
- le poids $\boxed{\vec{P} = -mg\vec{u_z}}$ force conservative ne travaillant pas
- la réaction du support perpendiculaire au mouvement : $\boxed{\vec{R} = R_r\vec{u_r} + R_z\vec{u_z}}$

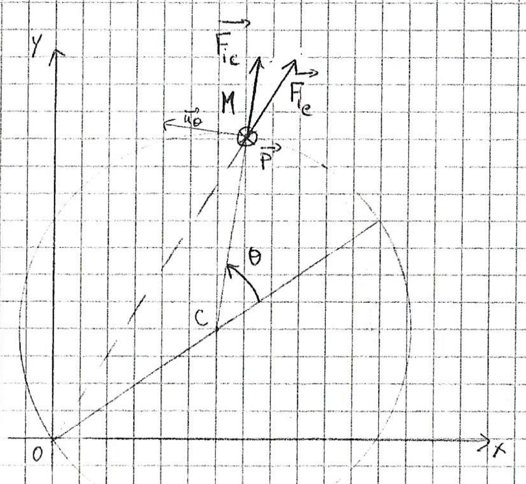
Cette force ne travaille pas non plus

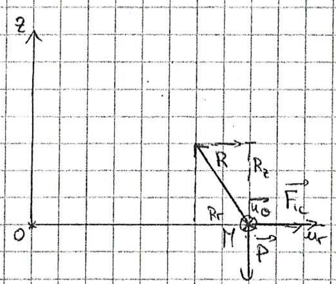
(pseudo-forces)
- la force d'inertie de Coriolis $\vec{F_{ic}} = -2m\omega\vec{u_z} \wedge \vec{v_{R'}}(M) = -2m\omega\vec{u_z} \wedge R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$$\boxed{\vec{F_{ic}} = 2m\omega R\dot{\theta}\,\vec{u_r}}$$

- la force d'inertie centrifuge (la rotation est uniforme) = force d'inertie d'entraînement $\vec{F_{ie}} = m\omega^2\vec{OM} = m\omega^2(\vec{OC} + \vec{CM}) = m\omega^2(R\vec{u_x} + R\vec{u_r})$

$$\boxed{\vec{F_{ie}} = m\omega^2 R\left[(1+\cos\theta)\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right]}$$





Dans R', M a un mouvement circulaire de centre C et de rayon R.

②

a) $m\vec{a_{R'}}(M) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}}$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = R_r + 2m\omega R\dot{\theta} + m\omega^2 R(1+\cos\theta) & (1) \\ mR\ddot{\theta} = -m\omega^2 R\sin\theta & (2) \\ 0 = R_z - mg & (3) \end{cases}}$$

b) De (2), on déduit l'équation différentielle du mouvement : $\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0}$

On reconnaît l'équation différentielle du mouvement pour un pendule pesant.

(avec $\omega^2 = g/\ell$), on va donc retrouver un certain nombre de caractéristiques du mouvement de ce système.

c) De (1) et (3), on déduit, le vecteur réaction $\vec{R}$:

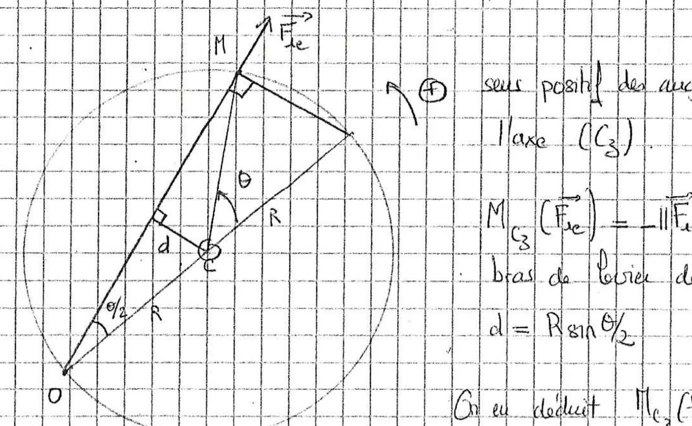
$$\boxed{\begin{cases} R_r = -mR\dot{\theta}^2 - 2m\omega R\dot{\theta} - m\omega^2 R(1+\cos\theta) \\ R_z = mg \end{cases}}$$

A4. a) L'axe (C_z) est un axe fixe dans R'.

En appliquant le TMC par rapport à (C_z), on supprime l'inconnue de liaison $\vec{R}$.

En effet $\vec{R}$ appartenant au plan contenant M et (C_z), son moment par rapport à (C_z) est nul.

b)



(+) sens positif des angles associé à l'axe (C_z)

$\mathcal{M}_{C_z}(\vec{F_{ie}}) = -\|\vec{F_{ie}}\|\,d$ avec d le bras de levier défini sur le dessin

$d = R\sin\theta/2$

On en déduit $\mathcal{M}_{C_z}(\vec{F_{ie}}) = -m\omega^2 OM\,R\sin\theta/2$

or $\underline{OM = 2R\cos\theta/2}$

Il vient $M_{C_3}(\vec{F_{ie}}) = -m\omega^2 2R\cos\theta/_2 \sin\theta/_2 = \boxed{-m\omega^2 R^2 \sin\theta}$

D'autre part $\boxed{M_{C_3}(\vec{R}) = M_{C_3}(\vec{P}) = M_{C_3}(\vec{F_{ic}}) = 0}$

c> Le point M sera en équilibre relatif dans R' lorsque $M_{C_3}(\vec{F_{ie}}) = 0$

ou encore pour $\underline{\theta = 0 \ [\pi]}$

d> On applique le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à (C_3) dans le référentiel R'

$$\frac{dL_{C_3}}{dt} = M_{C_3}(\vec{R}) + M_{C_3}(\vec{P}) + M_{C_3}(\vec{F_{ie}}) + M_{C_3}(\vec{F_{ic}})$$

$L_{C_3} = \vec{u_3} \cdot (\vec{CM} \wedge m\vec{v}_{R'}(M)) = mR^2\dot{\theta}$

Il vient $mR^2\ddot{\theta} = -m\omega^2R^2\sin\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0}$

On retrouve bien l'équation différentielle de la question A3

A.5.

a> D'après le bilan des forces, M n'est soumis qu'à des forces qui ne travaillent pas ou à des forces conservatives. La perle M constitue donc un <u>système conservatif</u>.

En effet $\begin{cases} \vec{R}, \vec{P} \text{ et } \vec{F_{ic}} \text{ ne travaillent pas car elles sont perpendiculaires au mouvement} \\ \vec{F_{ie}} \text{ la force centrifuge dérive d'une énergie potentielle centrifuge (voir cours, car la rotation est uniforme)} \end{cases}$

b> D'après le cours de mécanique $E_p(\theta) = E_{p_{ie}}(\theta) = -\frac{1}{2}m\omega^2 OM^2 + cte$

$\Rightarrow E_p(\theta) = -\frac{1}{2}m\omega^2 4R^2\cos^2\theta/_2 + cte$

or $E_p(\pi) = cte = 0$

On en déduit $\boxed{E_p(\theta) = -2m\omega^2R^2\cos^2\theta/_2 = -m\omega^2R^2(1+\cos\theta)}$

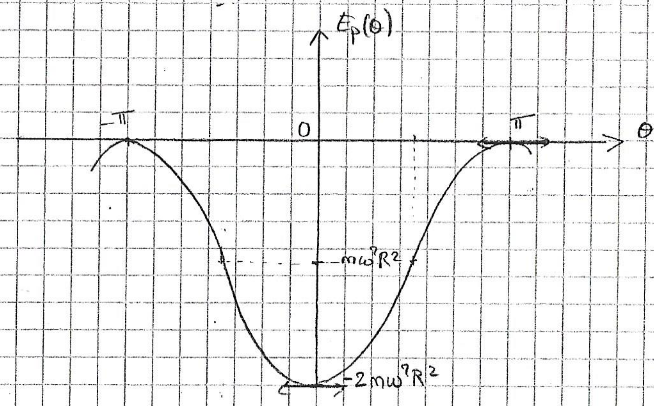
c) On écrit $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_{R'}^2(M) + E_p(\theta) = cte$

$$\underline{E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - m\omega^2R^2(1+\cos\theta)}$$

$\frac{dE_m}{dt} = 0 \iff mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + m\omega^2R^2\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$

En simplifiant par $\dot{\theta}$ et mR^2, il vient $\underline{\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0}$

d) Pour ce faire, il suffit de tracer $E_p(\theta)$



$E_p(\theta) = -m\omega^2R^2(1+\cos\theta)$

$E_p(\theta)$ admet un minimum en $\theta = 0 \ [2\pi]$ et un maximum en $\theta = \pi \ [2\pi]$

On en déduit que M admet en

$\boxed{\begin{cases} \theta = 0 & \text{un équilibre stable} \\ \theta = \pm\pi & \text{un équilibre instable} \end{cases}}$

(On retrouve bien les positions d'équilibre du pendule pesant et la même évolution de E_p en fonction de θ)

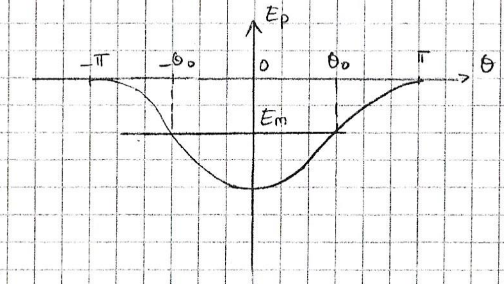
A.6 $t = 0$ $\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases}$

a) A l'instant $t=0$, l'énergie mécanique de la perle est égale à

$$E_m = E_c + E_p = 0 - 2m\omega^2R^2\cos^2\theta_0/2 \leq 0$$

La zone accessible à la particule est donnée par $E_m \geq E_p$ car $E_c \geq 0$

Graphiquement, on constate que le mouvement de la particule est lié et si on utilise l'analogie avec la petite bille, on prévoit que la perle M a un mouvement oscillatoire et va osciller dans le référentiel $\mathcal{R}'$ entre $\theta = -\theta_0$ et $\theta = \theta_0$



La perle M rebrousse chemin lorsque $\dot\theta = 0$ ou encore lorsque $E_p(\theta) = E_m$

b). Si $\theta_0 \ll 1$, on peut en déduire $\theta(t) \ll 1$ puisque $\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0]$

L'équation différentielle se simplifie de la manière suivante :

$$\underline{\ddot\theta + \omega^2\theta(t) = 0}$$

La solution de cette équation différentielle est alors $\theta(t) = C\cos(\omega t) + D\sin\omega t$

Or $\theta(0) = \theta_0 = C$ et $\dot\theta(0) = D\omega = 0$

On en déduit $\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos\omega t}$

c) La vitesse de la perle est maximale lorsque $\theta = 0$, puisqu'à cet endroit $E_p(\theta)$ est minimale

Or $E_m = -2m\omega^2R^2\cos^2\frac{\theta_0}{2} = -2m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}mv_{max}^2$

$$\Longrightarrow \quad v_{max}^2 = 4\omega^2R^2\left(1 - \cos^2\theta_0/2\right) = 4\omega^2R^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{v_{max} = 2\omega R\sin\frac{\theta_0}{2}}$$

Application numérique : $\underline{v_{max} = 6{,}99\,10^{-1}\,m.s^{-1}}$

d)

$$-2m\omega^2R^2\cos^2\frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 - 2m\omega^2R^2\cos^2\theta/2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot\theta^2 = 4\omega^2\left(\cos^2\theta/2 - \cos^2\theta_0/2\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot\theta = \pm 2\omega\left(\cos^2\theta/2 - \cos^2\theta_0/2\right)^{1/2}$$

La période des oscillations sera donnée par

$$T = 2\int_{\theta=-\theta_0}^{\theta_0} dt = 2\int_{\theta=-\theta_0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\dot\theta} \quad \text{avec } \dot\theta > 0$$

$$\Longrightarrow \quad T = 2\int_{\theta=-\theta_0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{2\omega\left(\cos^2\theta/2 - \cos^2\theta_0/2\right)^{1/2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{T = \frac{1}{\omega}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\left(\cos^2\theta/2 - \cos^2\theta_0/2\right)^{1/2}}}$$

Application numérique : $T = \frac{1}{\omega}\,6{,}38 = 0{,}18\,s$

A7 A $t=0$, l'énergie mécanique de la perle est égale à $E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta_0^2 - 2m\omega^2R^2$

D'après le raisonnement de la question A6, la perle a un mouvement oscillatoire dans le référentiel R' si $E_m \leq 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}mR^2\dot\theta_0^2 \leq 2m\omega^2R^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{|\dot\theta_0| \leq 2\omega}$$

Application numérique : $\underline{|\dot\theta_0| \leq 10{,}0\,rad.s^{-1}}$

A.8

) Pour $t > 0^+$, il faut rajouter dans le bilan des forces la force de frottement $\vec{F} = F\vec{u_\theta}$

En appliquant le PFD, il vient suivant $\vec{u_\theta}$:

$$m R\ddot{\theta} = -m\omega^2 R\sin\theta + F$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = \frac{F}{mR}}$$ pour les angles petits : $$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \frac{F}{mR}}$$

On résout l'équation différentielle précédente : $\theta(t)$ = régime forcé + régime libre

$$\theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{F}{mR\omega^2}$$

avec $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \theta_0 - \dfrac{F}{mR\omega^2} \\ B = 0 \end{cases}$

On en déduit $$\boxed{\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{F}{mR\omega^2}\right)\cos\omega t + \frac{F}{mR\omega^2}}$$

$\dot{\theta}(t_1) = 0 \Leftrightarrow \left(\theta_0 - \dfrac{F}{mR\omega^2}\right)\omega\sin\omega t_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_1 = \dfrac{\pi}{\omega}}$

$\theta_1 = \theta(t_1) = \left(\theta_0 - \dfrac{F}{mR\omega^2}\right)(-1) + \dfrac{F}{mR\omega^2} \Leftrightarrow \boxed{\theta_1 = -\theta_0 + \dfrac{2F}{mR\omega^2}}$

) Pour $t > t_1$, la force de frottements change de direction : $\vec{F} = -F\vec{u_\theta}$

L'équation différentielle du mouvement devient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = -\frac{F}{mR}}$$

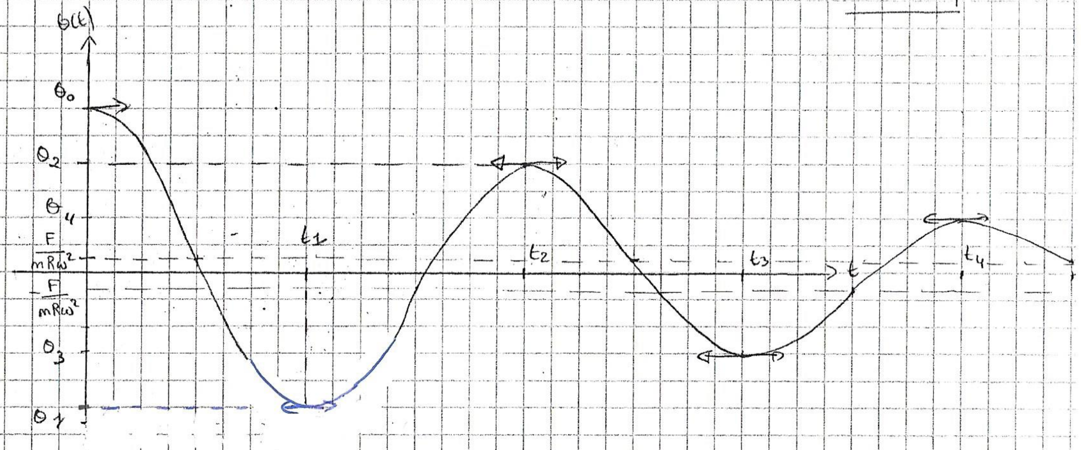
On résout cette équation différentielle et on trouve $\theta(t) = \left(\theta_1 + \dfrac{F}{mR\omega^2}\right)\cos\omega(t - t_1) - \dfrac{F}{mR\omega^2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta(t) = \left(-\theta_0 + \frac{3F}{mR\omega^2}\right)\cos\omega(t - t_1) - \frac{F}{mR\omega^2}}$$

La perle rebrousse chemin lorsque $t_2 - t_1 = \dfrac{\pi}{\omega} \Leftrightarrow \boxed{t = t_2 = \dfrac{2\pi}{\omega}}$

et $$\boxed{\theta_2 = \theta(t_2) = \theta_0 - \frac{4F}{mR\omega^2}}$$

d) De l'étude précédente, on déduit que la période des oscillations est $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$



ici $\theta_0 = 12\dfrac{F}{mR\omega^2}$

Rque : à chaque instant t_i : $m\omega^2 R\theta_i > F$, la perle M ne reste pas immobile et l'oscillation continue.

e) Pour $0 < t < t_1$, on a trouvé $\theta(t) = \left(\theta_0 - \dfrac{F}{mR\omega^2}\right)\cos\omega t + \dfrac{F}{mR\omega^2}$

On en déduit $\dot{\theta}(t) = -\omega\left(\theta_0 - \dfrac{F}{mR\omega^2}\right)\sin\omega t$

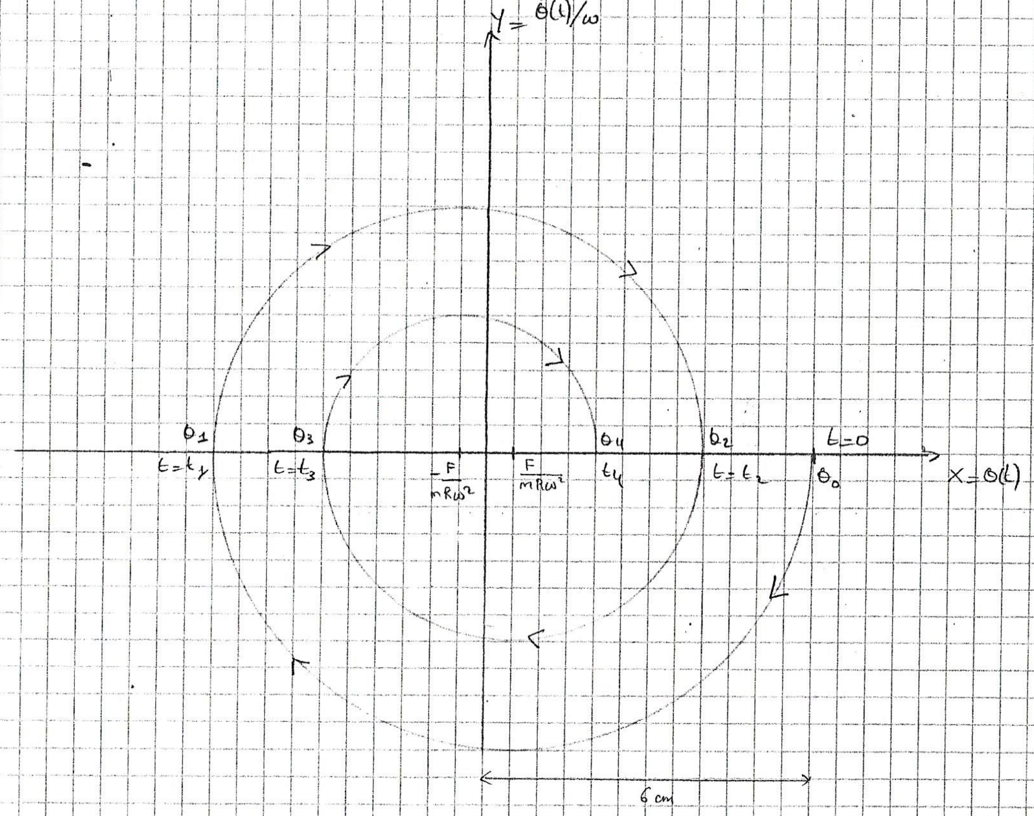
Ainsi $\left(\theta(t) - \dfrac{F}{mR\omega^2}\right)^2 + \dfrac{\dot{\theta}^2}{\omega^2} = \left(\theta_0 - \dfrac{F}{mR\omega^2}\right)^2$

On pose $X = \theta(t)$ et $Y = \dot{\theta}/\omega$

Ainsi $$\boxed{\left(X - \frac{F}{mR\omega^2}\right)^2 + Y^2 = \left(\theta_0 - \frac{F}{mR\omega^2}\right)^2}$$ est l'équation de la trajectoire de phase

Pour $0 < t < t_1$, on en déduit que la trajectoire de phase est un cercle de rayon $\left(\theta_0 - \frac{F}{mR\omega^2}\right)$ et de centre $\left(\frac{F}{mR\omega^2}, 0\right)$.

De la même manière, on pourrait démontrer que la trajectoire de phase entre t_1 et t_2 est un cercle de rayon $\left(\theta_0 - \frac{3F}{mR\omega^2}\right)$ et de centre $\left(-\frac{F}{mR\omega^2}, 0\right)$

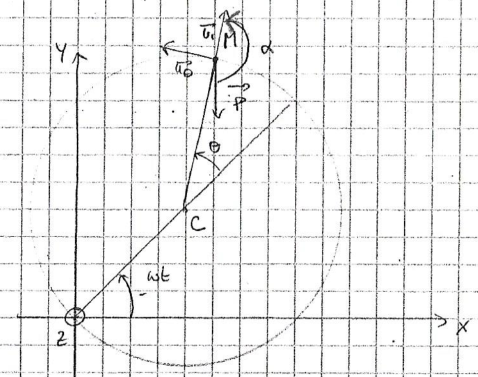


A $t = 0^+$ $\dot{\theta}(t) < 0$ car les angles $\theta(t)$ décroissent.

B- Cerceau vertical en rotation

B1. Les pseudo forces sont identiques à celle de la partie A.

Seuls le poids et la réaction de l'anneau sur la perle sont modifiés



$$\begin{cases} \vec{F_c} = 2m\omega R\dot{\theta}\,\vec{u_r} \\ \vec{F_e} = m\omega^2 R\left[(1+\cos\theta)\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{P} = mg\left[+\cos\alpha\,\vec{u_r} - \sin\alpha\,\vec{u_\theta}\right] \\ \vec{R} = R_r\vec{u_r} \end{cases}$$

avec $\alpha(t) = \omega t + \theta(t) + \frac{\pi}{2}$

$\vec{R}$ n'a plus de composante suivant (Oz), car aucune autre force n'a de composante dans cette direction et M n'a pas non plus de mouvement dans cette direction. De plus $\vec{R}$ est perpendiculaire au mouvement.

B2. Vu la question précédente, il paraît simple ici d'écrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}'$ appliqué à M suivant $\vec{u_\theta}$:

$$mR\ddot{\theta} = -m\omega^2 R\sin\theta - mg\cos(\omega t + \theta(t))$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = -\frac{g}{R}\cos(\omega t + \theta(t))}$$

B3 La nouvelle expression du vecteur réaction de l'anneau sur la perle est alors :

$$\underline{\vec{R} = -\left(mR\dot{\theta}^2 + 2m\omega R\dot{\theta}\right)\vec{u_r} - m\omega^2 R(1+\cos\theta)\vec{u_r} + mg\sin(\omega t + \theta)\vec{u_r}}$$

B4 D'après les valeurs numériques données dans l'énoncé, le poids est négligeable devant la force d'inertie centrifuge : $mg \ll m\omega^2 R \Leftrightarrow g \ll \omega^2 R$

en effet $\omega^2 R \simeq$

b) $\sin\theta \simeq \theta$ à l'ordre 1 en θ

$\cos(\omega t + \theta(t)) = \cos\omega t \cos\theta(t) - \sin\omega t \sin\theta$

$\simeq \cos\omega t - \sin\omega t \cdot \theta$ à l'ordre 1 en θ

L'équation différentielle du mouvement donne :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta - \frac{g}{R}\sin\omega t\,\theta = -\frac{g}{R}\cos\omega t}$$

/ $\left.\begin{array}{l}\omega^2 = 1225\ (rad^2.s^{-2}) \\ \frac{g}{R} = 98,1\ rad^2.s^{-2}\end{array}\right\}$ $\omega^2 \simeq 12,5\ g/R$

Pour simplifier l'équation, on va donc négliger $\frac{g}{R}$ devant ω^2.

Ainsi $\theta(t)\left[\omega^2 - \frac{g}{R}\sin\omega t\right] \simeq \omega^2\theta(t)$

L'équation différentielle s'écrit donc :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = -\frac{g}{R}\cos\omega t} \qquad \begin{cases} \ell = \omega^2 \\ \gamma = -g/R \end{cases}$$

/ $t = 0$ $\begin{cases}\theta = 0 \\ \dot{\theta} = 0\end{cases}$

$\theta(t)$ = régime libre + régime forcé

Recherche du régime forcé : $\begin{cases}\theta(t) = \left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right]t \\ \dot{\theta}(t) = \left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right] + t\left[-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t\right] \\ \ddot{\theta}(t) = -2A\omega\sin\omega t + 2B\omega\cos\omega t + t\left[-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t\right]\end{cases}$

Ainsi, en réinjectant dans l'équation différentielle, il vient

$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = -2A\omega\sin\omega t + 2B\omega\cos\omega t = -g/R\cos\omega t$

On en déduit $\boxed{A = 0}$ et $\boxed{B = -g/2R\omega}$

Régime libre : $\theta(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$

En conclusion $\theta(t) = -\frac{g}{2R\omega}\sin\omega t \cdot t + C\cos\omega t + D\sin\omega t$

On utilise ensuite les conditions initiales : $\theta(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow D = 0$

On en déduit $\boxed{\theta(t) = -\frac{g}{2R\omega}t\sin\omega t}$

On constate qu'à cause de la présence du poids $\theta = 0$ n'est plus une position d'équilibre stable. La perle s'écarte a priori de $\theta = 0$ (solution divergente)

L'équation précédente n'est valable tant $\theta(t) \ll 1$ ou encore tant que $\frac{gt}{2R\omega} \ll 1 \iff \boxed{t \ll \frac{2R\omega}{g}}$

A.N. $t \ll 0,71\,s$!!

L'équation précédente est donc valable très peu de temps et permet de montrer que la perle s'écarte rapidement de $\theta = 0$!

Pour connaître le mouvement de la perle à tout instant t, on ne peut pas faire l'hypothèse des petits mouvements, il faudrait intégrer l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = -\frac{g}{R}\cos\omega t$ à l'aide du logiciel Maple par exemple.