

# PC\* 2 : Programme de colles de mathématiques n°6

Semaine du 20 novembre 2023 au 25 novembre 2023

## Intégration

Il s'agit du même programme que celui de la semaine dernière.

### Questions de cours

- Théorème de comparaison (positif et intégrabilité). (Démonstration)
- Théorème d'intégration par parties. (Démonstration)
- Théorème de changement de variable. (Démonstration)
- L'absolue convergence implique la convergence. (Démonstration)
- Exemples de Riemann. (Démonstration)
- Théorème de convergence dominée à paramètre continue. (Démonstration).
- Théorème de dérivation des intégrales à paramètre. (Démonstration).

### Le programme

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.

Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.

#### b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour  $f$  continue par morceaux sur  $[a, +\infty[$ , l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  est dite convergente si  $\int_a^x f(t) dt$  a une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Notations  $\int_a^{+\infty} f$ ,  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ .

Intégrale convergente (resp. divergente) en  $+\infty$ .

Si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, +\infty[$  et à valeurs positives, alors  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge si et seulement si  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est majorée.

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, +\infty[$  telles que  $0 \leq f \leq g$ , la convergence de  $\int_a^{+\infty} g$  implique celle de  $\int_a^{+\infty} f$ .

**c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque**

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de  $\mathbb{R}$ .

Propriétés des intégrales généralisées :  
linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Changement de variable :

si  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[$  est une bijection strictement croissante de classe  $\mathcal{C}^1$ , et si  $f$  est continue sur  $]a, b[$ , alors

$\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$  sont de même nature, et égales en cas de convergence.

Notations  $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$ .

Intégrale convergente (resp. divergente) en  $b$ , en  $a$ .

La démonstration n'est pas exigible.

L'existence des limites finies du produit  $fg$  aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de  $fg'$  et  $f'g$  sont de même nature.

~~Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.~~

La démonstration n'est pas exigible.

Adaptation au cas où  $\varphi$  est strictement décroissante.

~~On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.~~

**d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables**

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Inégalité triangulaire.

Une fonction est dite intégrable sur un intervalle  $I$  si elle est continue par morceaux sur  $I$  et son intégrale sur  $I$  est absolument convergente.

Espace vectoriel  $L^1(I, \mathbb{K})$  des fonctions intégrables sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Si  $f$  est continue, intégrable et positive sur  $I$ , et si  $\int_I f(t) dt = 0$ , alors  $f$  est identiquement nulle.

Théorème de comparaison :

pour  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, +\infty[$  :

- si  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$ , alors l'intégrabilité de  $g$  en  $+\infty$  implique celle de  $f$ .
- si  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$ , alors l'intégrabilité de  $f$  en  $+\infty$  est équivalente à celle de  $g$ .

Fonctions de référence :

pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

- intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  en  $+\infty$ , en  $0^+$  ;
- étude de l'intégrabilité de  $t \mapsto e^{-\alpha t}$  en  $+\infty$ .

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Notations  $\int_I f, \int_I f(t) dt$ .

Pour  $I = ]a, b[$ , (respectivement  $]a, b]$ ), fonction intégrable en  $b$  (resp. en  $a$ ).

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$ .

L'intégrabilité de  $t \mapsto \ln t$  en 0 peut être directement utilisée.

Les résultats relatifs à l'intégrabilité de  $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$  en  $a$  peuvent être directement utilisés.

Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction  $x \mapsto f(x)$  est intégrable en  $a^+$  (resp. en  $b^-$ ) si  $t \mapsto f(a+t)$  (resp.  $t \mapsto f(b-t)$ ) l'est en  $0^+$ .

**e) Suites et séries de fonctions intégrables**

*Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.*

Théorème de convergence dominée :  
 si une suite  $(f_n)$  de fonctions continues par morceaux sur  $I$  converge simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et s'il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$  vérifiant  $|f_n| \leq \varphi$  pour tout  $n$ , alors les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$  et :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

La démonstration est hors programme.

**f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre**

*Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à  $x$  et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à  $t$ .*

Théorème de continuité :

si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ , telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ ;

alors la fonction  $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est définie et continue sur  $A$ .

Théorème de convergence dominée à paramètre continu:

si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  une borne de  $A$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$  telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  et  $t \mapsto \ell(t)$  sont continues par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ ;

alors  $\ell$  est intégrable sur  $I$  et :

$$\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt.$$

Théorème de dérivation :

si  $A$  et  $I$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$ , telle que :

- pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ ;
- pour tout  $x \in A$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , telle que pour tout  $(x, t) \in A \times I$ , on ait  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ ;

alors la fonction  $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$  et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension à la classe  $\mathcal{C}^k$  d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  et d'intégrabilité des  $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$  pour  $0 \leq j < k$ .

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de  $A$ , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

La démonstration n'est pas exigible.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de  $A$ , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

## CONTENUS

## CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

---