

PC* 2 : Programme de colles de mathématiques n°6

Semaine du 13 novembre 2023 au 18 novembre 2023

Intégration

Questions de cours

- Théorème de comparaison (positif et intégrabilité). (Démonstration)
- Théorème d'intégration par parties. (Démonstration)
- Théorème de changement de variable. (Démonstration)
- L'absolue convergence implique la convergence. (Démonstration)
- Exemples de Riemann. (Démonstration)
- Théorème de convergence dominée à paramètre continue. (Démonstration).
- Théorème de dérivation des intégrales à paramètre. (Démonstration).

Le programme

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{K} , ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de \mathbb{R} .

Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.

Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.

b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est dite convergente si $\int_a^x f(t) dt$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.

Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de \mathbb{R} .

Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Intégrale convergente (resp. divergente) en b , en a .

Propriétés des intégrales généralisées :
linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Changement de variable :

si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe \mathcal{C}^1 , et si f est continue sur $]a, b[$, alors

$\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

La démonstration n'est pas exigible.

L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature.

~~Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.~~

La démonstration n'est pas exigible.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

~~On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.~~

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Inégalité triangulaire.

Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.

Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

Si f est continue, intégrable et positive sur I , et si

$\int_I f(t) dt = 0$, alors f est identiquement nulle.

Théorème de comparaison :

pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:

- si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f .
- si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g .

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Notations $\int_I f, \int_I f(t) dt$.

Pour $I = [a, b[$, (respectivement $]a, b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$.

Fonctions de référence :

pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

- intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ;
- étude de l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$.

L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée.

Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés.

Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+ .

e) Suites et séries de fonctions intégrables

~~Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.~~

Théorème de convergence dominée :

si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n , alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

La démonstration est hors programme.

f) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .

Théorème de continuité :

si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Théorème de convergence dominée à paramètre continu :

si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} , a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors ℓ est intégrable sur I et :

$$\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt.$$

Théorème de dérivation :

si A et I sont deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I , telle que pour tout $(x, t) \in A \times I$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension à la classe \mathcal{C}^k d'une intégrale à paramètre,

sous hypothèse de domination de $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ pour $0 \leq j < k$.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

On remarque qu'il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

La démonstration n'est pas exigible.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.
