

PC* 2 : Programme de colles de mathématiques n°4

Semaine du 16 octobre 2023 au 21 octobre 2023

Espaces vectoriels normés

Questions de cours

- L'une des normes $\| \cdot \|_i$ est ... une norme sur \mathbb{K}^n , avec $i \in \{1, 2, \infty\}$ (dem).
- Propriétés intersection/union des ouverts d'un evn (dem).
- Propriétés intersection/union des fermés d'un evn (dem).
- Adhérence. Caractérisation séquentielle (dem).
- Caractérisation séquentielle des fermés (dem).
- Caractérisation séquentielle de la limite (dem).
- Propriétés des images réciproques des ouverts/fermés par les applications $f : E \rightarrow F$ continues sur E .
- Continuité des applications linéaires en dimension finie.

Le programme

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace pré-hilbertien réel.	Normes usuelles $\ \cdot \ _1$, $\ \cdot \ _2$ et $\ \cdot \ _\infty$ sur \mathbb{K}^n . Norme $\ \cdot \ _\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{K} . L'égalité $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour A partie non vide de \mathbb{R} et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère. Partie convexe. Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	Convexité des boules.
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.

d) Topologie d'un espace vectoriel normé

Point intérieur à une partie.
 Ouvert d'un espace normé.
 Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.
 Fermé d'un espace normé.

Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.
 Point adhérent à une partie, adhérence.

Partie dense.
 Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

Une boule ouverte est un ouvert.

Caractérisation séquentielle.
 Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.

L'adhérence est l'ensemble des points adhérents.
 Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.

e) Limite et continuité en un point

Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.
 Opérations algébriques sur les limites, composition.
 Continuité en un point.

Caractérisation séquentielle.

Caractérisation séquentielle.

f) Continuité sur une partie

Opérations algébriques, composition.
 Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.

Si f est une application continue de E dans \mathbb{R} alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geq 0$ sont des fermés.

g) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie.

Théorème des bornes atteintes :
 toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.
 Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.

La démonstration est hors programme.
 La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
 La démonstration est hors programme.

La notion de norme subordonnée est hors programme.
 Exemples du déterminant, du produit matriciel.