PC* 2 : Programme de colles de mathématiques n°3

Semaine du 9 *octobre* 2023 *au* 13 *octobre* 2023

Algèbre linéaire

Questions de cours

- Un nombre fini d'espaces propres sont en somme directe (démonstration).
- Polynôme caractéristique d'un induit. Inégalité $\dim E_\lambda(u) \leq \omega(\lambda)$. (Démonstration)
- Théorème de diagonalisation : $E = \bigoplus_{\lambda\in Sp(u)} E_\lambda(u) \iff \dim E = \sum_{\lambda\in Sp(u)} \dim E_\lambda(u) \iff \chi_u$ scindé et $\dim E_\lambda(u) = \omega_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in Sp(u) \iff$ il existe une base de E de vecteurs propores de u. (Dem)
- Diagonalisation des projecteurs et symétries. (Dem)
- Caractérisation des endomorphismes diagonalisables en termes de polynômes annulateurs scindés, racines simples. (Dem)
- Théorème de trigonalisation. (Dem)

Le programme

1° Révisions du programme de Sup d'algèbre linéaire.

2° Programme de Spé d'algèbre linéaire :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	
En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.	Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	
Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v.	

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée. Linéarité, trace d'une transposée. Relation $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	Notation $\operatorname{tr}(A)$.
d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées	
Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Polynôme annulateur. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Application au calcul de l'inverse et des puissances. Le noyau de $P(u)$ est stable par u.
e) Interpolation de Lagrange	
Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.	Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année. Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- *l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres) ;*
- *l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).*

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\operatorname{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.
b) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.	Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.

c) Diagonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.	Exemple des projecteurs et des symétries.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Polynôme caractéristique scindé à racines simples. Traduction matricielle.

d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.	
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.	

e) Trigonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle.
Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.