

PC* 2 : Programme de colles de mathématiques n°2

Semaine du 02 octobre 2023 au 07 octobre 2023

Algèbre linéaire et réduction

Questions de cours

- Définition d'une somme directe de sous-espaces vectoriels. Inégalité $\dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \dim F_i$. Caractérisation du cas d'égalité en termes de somme directe.
- Si $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ et u et v commutent, alors $\text{Ker } u$ et $\text{Im } v$ sont stables par v . Les sous-espaces propres de u sont stables par u .
- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et F est un sous-espace stable par u : forme de la matrice dans une base adaptée à F . Déterminant par bloc.
- Déterminant de Vandermonde (avec démonstration)
- Définition et propriétés de polynômes d'interpolation de Lagrange.
- Un nombre fini d'espaces propres sont en somme directe (démonstration).
- Polynôme caractéristique d'un induit. Inégalité $\dim E_\lambda(u) \leq \omega(\lambda)$. (Démonstration)
- Théorème de diagonalisation : $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \iff \dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \iff \chi_u$ scindé et $\dim E_\lambda(u) = \omega_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u) \iff$ il existe une base de E de vecteurs propres de u (Démonstration).
- Caractérisation des endomorphismes diagonalisables en termes de polynômes annulateurs scindés, racines simples. Application à un induit.
- Théorème de trigonalisation (Démonstration).

Le programme

1° Révisions du programme de Sup d'algèbre linéaire.

2° Programme de Spé d'algèbre linéaire :

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.

Si F_1, \dots, F_p sont des sous-espaces de dimension finie,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

b) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v .

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

c) Trace

Trace d'une matrice carrée.

Notation $\text{tr}(A)$.

Linéarité, trace d'une transposée.

Relation $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Polynôme annulateur.

Application au calcul de l'inverse et des puissances.

Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent.

Le noyau de $P(u)$ est stable par u .

Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.

e) Interpolation de Lagrange

Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points distincts de \mathbb{K} .

Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points est le polynôme constant égal à 1.

Déterminant de Vandermonde.

Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année.

Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- *l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres) ;*
- *l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).*

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

a) Éléments propres

Droite stable par un endomorphisme.

Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.

Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.

Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.

Notation $\text{Sp}(u)$.

La notion de valeur spectrale est hors programme.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.

Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Si un polynôme P annule u , toute valeur propre de u est racine de P .

Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.

Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.

b) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique. Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u .

Coefficients de degrés 0 et $n - 1$.

Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.

La démonstration n'est pas exigible.

c) Diagonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E .

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{K} et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

Exemple des projecteurs et des symétries.

Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

Polynôme caractéristique scindé à racines simples.

Traduction matricielle.

d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

La démonstration n'est pas exigible.

Traduction matricielle.

Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.

e) Trigonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{K} .

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

La démonstration n'est pas exigible.

Traduction matricielle.

CONTENUS

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.
