

# PC\* 2 : Programme de colles de mathématiques n°15

Semaine du 26 février 2024 au 1<sup>er</sup> mars 2024

## Probabilités : tout

### Questions de cours

- Théorème de comparaison pour l'espérance.
- Pour une variable  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  :  $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ .
- Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.
- Fonctions génératrices caractérisent la loi. Fonctions génératrices des lois usuelles.
- Si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et d'espérance finie, alors  $G_X$  est dérivable en 1 et  $G'_X(1) = E(X)$ .

### Programme de PC

#### A - Ensembles dénombrables, familles sommables

*Ce préambule propose une introduction à minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.*

*Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.*

- Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de)  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme  $\{x_i, i \in I\}$  où  $I = \mathbb{N}$  ( $I \subset \mathbb{N}$ ) avec des  $x_i$  distincts.

Sont dénombrables :  $\mathbb{Z}$ , un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $[0, +\infty]$  sa somme  $\sum_{i \in I} x_i \in [0, +\infty]$ ,

et que pour tout découpage en paquets  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$  de  $I$ ,  $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} x_i \right)$ .

La famille  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $[0, +\infty]$  est dite sommable si  $\sum_{i \in I} x_i < \infty$ . En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

- Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si  $(|x_i|)_{i \in I}$  l'est. Pour  $I = \mathbb{N}$ , la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si  $|x_i| \leq y_i$  pour tout  $i \in I$ , la sommabilité de  $(y_i)_{i \in I}$  implique celle de  $(x_i)_{i \in I}$ .

En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

## B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes

Univers  $\Omega$ , tribu  $\mathcal{A}$ . Espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.

Traduction de la réalisation des événements  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$  et

$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$  à l'aide des quantificateurs  $\exists$  et  $\forall$ .

Événements.

Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.

Une variable aléatoire discrète  $X$  est une application définie sur  $\Omega$ , telle que  $X(\Omega)$  est au plus dénombrable et, pour tout  $x \in X(\Omega)$ ,  $X^{-1}(\{x\})$  est un événement.

L'univers  $\Omega$  n'est en général pas explicité.

Notations  $(X = x)$ ,  $\{X = x\}$ ,  $(X \in A)$ .

Notation  $(X \geq x)$  (et analogues) lorsque  $X$  est à valeurs réelles.

### b) Probabilité

Probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $\sigma$ -additivité.

Notation  $P(A)$ .

Espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire.

Croissance de la probabilité.

Continuité croissante, continuité décroissante.

Application : pour une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements (non nécessairement monotone), limites quand  $n$  tend vers l'infini de

$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

Sous-additivité :  $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ .

En cas de divergence de la série à termes positifs  $\sum P(A_n)$ , on rappelle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$

Événement presque sûr, événement négligeable.

Système quasi-complet d'événements.

### c) Probabilités conditionnelles

Si  $P(B) > 0$ , la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$  est définie par la relation  $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

L'application  $P_B$  définit une probabilité.

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales.

Si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$

On rappelle la convention  $P(B|A_n)P(A_n) = 0$  lorsque  $P(A_n) = 0$ .

Formule de Bayes.

### d) Loi d'une variable aléatoire discrète

Loi  $P_X$  d'une variable aléatoire discrète.

La probabilité  $P_X$  est déterminée par la distribution de probabilités  $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ .

On note  $X \sim Y$  lorsque les variables  $X$  et  $Y$  suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.

Variable aléatoire  $f(X)$ .  
Si  $X \sim Y$  alors  $f(X) \sim f(Y)$ .

On ne soulève aucune difficulté sur le fait que  $f(X)$  est une variable aléatoire.

Variable géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$  :  
 $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ .

Notation  $X \sim \mathcal{G}(p)$ .  
Relation  $P(X > k) = (1 - p)^k$ .  
Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ .

Variable de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  :  
 $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

Notation  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .  
Interprétation en termes d'événements rares.

Couple de variables aléatoires discrètes.

Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.

Loi conjointe, lois marginales.  
Loi conditionnelle de  $Y$  sachant un événement  $A$ .

Notation  $P(X = x, Y = y)$ .  
Extension aux  $n$ -uplets de variables aléatoires.

### e) Événements indépendants

Indépendance de deux événements.

Si  $P(B) > 0$ , l'indépendance de  $A$  et  $B$  équivaut à  
 $P(A|B) = P(A)$ .

Indépendance d'une famille finie d'événements.

L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants,  $A$  et  $\overline{B}$  le sont aussi.

Extension au cas de  $n$  événements.

### f) Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  définies sur  $\Omega$  sont indépendantes si, pour tout  $A \subset X(\Omega)$  et  $B \subset Y(\Omega)$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants.

Notation  $X \perp\!\!\!\perp Y$ .  
De façon équivalente, la distribution de probabilités de  $(X, Y)$  est donnée par

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Extension au cas de  $n$  variables aléatoires.

Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.

On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d.

Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

Fonctions de variables indépendantes :  
si  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , alors  $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ .

Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.

Lemme des coalitions :

si les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  le sont aussi.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

## C - Espérance et variance

### a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , définie par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Variable aléatoire  $X$  à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de  $X$ .

Pour  $X$  variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , relation :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.

Formule de transfert :

$f(X)$  est d'espérance finie si et seulement si la famille  $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable. Dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

Linéarité de l'espérance.

Si  $|X| \leq Y$  et  $E(Y) < +\infty$ , alors  $X$  est d'espérance finie.

Positivité, croissance de l'espérance.

Si  $X$  est positive et d'espérance nulle, alors  $(X = 0)$  est presque sûr.

Pour  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors  $XY$  est d'espérance finie et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

On adopte la convention  $xP(X = x) = 0$  lorsque  $x = +\infty$  et  $P(X = +\infty) = 0$ .

$X$  est d'espérance finie si la famille  $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de  $X$ .

Variable centrée.

On remarque que la formule s'applique aux couples, aux  $n$ -uplets de variables aléatoires.

### b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

Si  $X^2$  est d'espérance finie,  $X$  est d'espérance finie.

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

si  $X^2$  et  $Y^2$  sont d'espérance finie, alors  $XY$  l'est aussi et :

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

Cas d'égalité.

Variance, écart type.

Notations  $V(X)$ ,  $\sigma(X)$ .

Variable réduite.

Relation  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

Relation  $V(aX + b) = a^2V(X)$ .

Si  $\sigma(X) > 0$ , la variable  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite.

Variance d'une variable géométrique, de Poisson.

Covariance de deux variables aléatoires.

Relation  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ , cas de deux variables indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.

---

**c) Fonctions génératrices**


---

Fonction génératrice de la variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

La loi d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est caractérisée par sa fonction génératrice  $G_X$ .

La variable aléatoire  $X$  est d'espérance finie si et seulement si  $G_X$  est dérivable en 1 ; dans ce cas  $E(X) = G_X'(1)$ .

Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

La série entière définissant  $G_X$  est de rayon  $\geq 1$  et converge normalement sur  $[-1, 1]$ . Continuité de  $G_X$ .

Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

La démonstration de la réciproque n'est pas exigible.

Utilisation de  $G_X$  pour calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

---

**d) Inégalités probabilistes**


---

Inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres :

si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $m = E(X_1)$ ,

pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les étudiants doivent savoir retrouver, avec  $\sigma = \sigma(X_1)$  :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$


---