# PC* 2 : Programme de colles de mathématiques n°14

*Semaine du* 29 *janvier* 2024 *au* 2 *février* 2024

## Espaces euclidiens

Même programme que le précédent.

### Questions de cours

- Caractérisation des isométries vectorielles. (Démonstrations)
- Si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, alors $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$. (Démonstration)
- Théorème spectral (Démonstration).
- Caractérisation des endomorphismes autoadjoints définis positifs. (Démonstration)

**Programme de Spé**

Cette section vise les objectifs suivants :

- consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces préhilbertiens réels ;
- étudier isométries vectorielles et matrices orthogonales, et les décrire en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques ;
- approfondir la thématique de réduction des endomorphismes dans le cadre euclidien en énonçant les formes géométrique et matricielle du théorème spectral ;
- introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, qui trouvera notamment son application au calcul différentiel d'ordre 2.

Pour les applications courantes en dimension trois, on peut au besoin recourir au produit vectoriel, déjà introduit et connu des étudiants dans l'enseignement des sciences physiques notamment.

La notion d'adjoint est hors programme.

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien** | |
| Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.<br>Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée. | Exemple : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions. |
| Groupe orthogonal. | Notation $\mathrm{O}(E)$.<br>On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. |
| Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. | |
| **b) Matrices orthogonales** | |
| Une matrice $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$. | Interprétation en termes de colonnes et de lignes.<br>Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée. |
| Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. | On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ». |
| Groupe orthogonal. | Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$. |
| Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.<br>Orientation. Bases orthonormées directes. | Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$. |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
| --- | --- |
| **c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien** | |
| Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. | Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. |
| Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. | On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls. |
| Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien. | |
| **d) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles** | |
| Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. | Notation $\mathscr{S}(E)$.<br>Caractérisation des projecteurs orthogonaux. |
| Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée. | On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ». |
| Théorème spectral :<br>tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres. | La démonstration n'est pas exigible.<br>Forme matricielle du théorème spectral. |
| Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. | Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}^{+}(E)$, $\mathscr{S}^{++}(E)$. |
| Matrice symétrique positive, définie positive. | Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. |

**Programme de Sup**

| Contenus | Capacités & commentaires |
| --- | --- |
| **a) Produit scalaire** | |
| Produit scalaire. | Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\vert y)$, $x\cdot y$. |
| Espace préhilbertien, espace euclidien. | |
| Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. | Expression $X^\top Y$. |
| Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. | Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. |
| **b) Norme associée à un produit scalaire** | |
| Norme associée à un produit scalaire, distance. | |
| Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. | Exemples : sommes finies, intégrales. |
| Inégalité triangulaire, cas d'égalité. | |
| Identité remarquable $\Vert x+y\Vert^2 = \Vert x\Vert^2 + \Vert y\Vert^2 + 2\langle x, y\rangle$. | Formule de polarisation associée. |
| **c) Orthogonalité** | |
| Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. | Notation $X^\perp$.<br>L'orthogonal d'une partie est un sous-espace. |
| Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale).<br>Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.<br>Théorème de Pythagore.<br>Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. | |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| **d) Bases orthonormées** | |
| Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée. | |
| **e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie** | |
| Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace $F$ de dimension finie. Projection orthogonale sur $F$. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur $x$ dans une base orthonormée de $F$. | En dimension finie : dimension de $F^{\perp}$, vecteur normal à un hyperplan. |
| Distance d'un vecteur à $F$. | Notation $d(x, F)$. |
| Le projeté orthogonal de $x$ sur $F$ est l'unique élément de $F$ qui réalise la distance de $x$ à $F$. | |