PC* 2 : Programme de colles de mathématiques n°12

Semaine du 15 *janvier* 2024 *au* 19 *janvier* 2024

Séries entières

Questions de cours

- Lemme d'Abel. (Démonstration)
- Définition du rayon de convergence. Si $|z| < R$ la série $\sum a_n z^n$ est ACV et si $|z| > R$ la séries $\sum a_n z^n$ DV grossièrement.
- Théorème de comparaison pour les séries entières.
- Séries entières somme et produit (définition, Rcv et sommes)
- DES de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Séries entières

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rayon de convergence	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.
Intervalle ouvert de convergence. Disque ouvert de convergence.	
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) : – si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$; – si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R\left(\sum n^\alpha x^n\right) = 1$. Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Unicité du développement en série entière.	
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.	La démonstration est hors programme.
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	