

PC* 2 : Programme de colles de mathématiques n°10

Semaine du 11 décembre 2023 au 15 décembre 2023

Suites et séries de fonctions, séries entières

Les élèves n'auront pas eu de TD sur les séries entières avant... mercredi (le cours sera sur ce chapitre sera essentiellement terminé à ce moment là).

La colle portera essentiellement sur les suites et séries de fonctions. Cependant il est souhaitable qu'il y ait un exercice court de recherche de rayon de convergence.

C'est la dernière semaine de colles de 2023! Très bonnes fêtes de fin d'année à tous!

Questions de cours

Pas de question de cours cette semaine.

Suites et séries de fonctions

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.

La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Utilisation d'une majoration uniforme de $|f_n(x)|$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$.

La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.

b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité de la limite d'une suite de fonctions :

si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I , alors f est continue sur I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions :

si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :
 si une suite (f_n) de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f , et si la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = g$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension aux suites de fonctions de classe \mathcal{C}^k , sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leq j < k$.

c) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Continuité de la somme d'une série de fonctions :
 si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I , alors sa somme est continue sur I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de la double limite :
 si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n , f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et :

La démonstration est hors programme.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment :
 si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Dérivation de la somme d'une série de fonctions :
 si une série $\sum f_n$ de classe \mathcal{C}^1 converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Extension à la classe \mathcal{C}^k sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

d) Intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions

Théorème d'intégration terme à terme :
 si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I , et si la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et :

La démonstration est hors programme.

On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Séries entière

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;
- étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Rayon de convergence

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.

Lemme d'Abel :

si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Intervalle ouvert de convergence.

Disque ouvert de convergence.

Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) :

- si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
- si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$.

Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.

La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.
