

PC* 2 : Programme de colles de mathématiques n°1

Semaine du 25 septembre 2023 au 29 septembre 2023

Algèbre linéaire

Questions de cours

- Théorème du rang (forme géométrique) : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $E = \text{Ker } u \oplus E'$, alors u induit un isomorphisme de E' sur $\text{Im } u$.
- Définition d'un projecteur; $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$; lien entre symétrie et projecteurs.
- Définition d'une somme directe de sous-espaces vectoriels. Caractérisation. Inégalité $\dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \dim F_i$.
Caractérisation du cas d'égalité en termes de somme directe.
- Si $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ et u et v commutent, alors $\text{Ker } u$ et $\text{Im } v$ sont stables par v . Cas $v = P(u)$.
- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et F est un sous-espace stable par u : forme de la matrice dans une base adaptée à F . Déterminant par bloc (avec démonstration).
- Trace : définition et propriétés.
- Polynômes de Lagrange : définition, formule d'interpolation.
- Déterminant de Vandermonde (avec démonstration).
- Polynômes d'endomorphismes, de matrices : définition, morphisme.

Le programme

1° Révisions du programme de Sup d'algèbre linéaire.

2° Programme de Spé d'algèbre linéaire :

Dans toute cette partie, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition $E = \bigoplus E_i$.

Si F_1, \dots, F_p sont des sous-espaces de dimension finie,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

b) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v .

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

c) Trace

Trace d'une matrice carrée. Notation $\text{tr}(A)$.
Linéarité, trace d'une transposée.
Relation $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
Polynôme annulateur. Application au calcul de l'inverse et des puissances.
Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Le noyau de $P(u)$ est stable par u .
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.

e) Interpolation de Lagrange

Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points distincts de \mathbb{K} . Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Déterminant de Vandermonde. Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.
