

## RAYONNEMENT NOIR ET QUANTA DE LUMIÈRE

Par M. LOUIS DE BROGLIE.

Le but de ce travail est d'établir un certain nombre de résultats connus de la théorie du rayonnement par des raisonnements qui s'appuient uniquement sur la thermodynamique, la théorie cinétique et celle des quanta sans aucune intervention de l'électromagnétisme.

L'hypothèse adoptée est celle des quanta de lumière. Le rayonnement noir en équilibre à la température  $T$  est considéré comme un gaz formé d'atomes de lumière d'énergie  $W = h\nu$ . Nous négligerons dans cet essai les molécules de lumière à 2, 3... $n$  atomes  $h\nu$ , c'est-à-dire que nous devons parvenir à la loi de rayonnement de Wien car, au point de vue des quanta de lumière, la forme de Wien dérive de l'équation complète de Planck quand on néglige les associations d'atomes.

La masse des atomes de lumière est supposée, conformément aux formules de la mécanique de la relativité, égale à  $\frac{h\nu}{c^2}$ , quotient de l'énergie par le carré de la vitesse de la lumière. Leur quantité de mouvement est  $\frac{h\nu}{c} = \frac{W}{c}$  (1).

Appelons  $n$  le nombre d'atomes de lumière contenus dans l'unité de volume. Sur l'unité de surface de la paroi limitant le volume, arrivent par seconde  $\frac{1}{6}nc$  atomes de lumière apportant chacun une quantité de mouvement égale à  $\frac{W}{c}$ . La force subie par l'unité de surface ou pression est donc

(1) La dynamique de la relativité donne pour un corps de masse propre  $m_0$  animé d'une vitesse  $v = \beta c$  une énergie cinétique  $W = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$  et une quantité de mouvement  $G = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ . Si le rapport  $\beta$  est petit, on retrouve les résultats de la mécanique rationnelle  $W = \frac{m_0 v^2}{2}$ ;  $G = mv = \frac{2}{v} W$ . Mais pour l'atome de lumière,  $m_0$  doit être infiniment petit et  $\beta$  infiniment voisin de 1 de telle façon que  $\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  ait une valeur définie  $m$ . On trouve alors  $W = mc^2$  et  $G = mc = \frac{W}{c}$ . Ce sont les relations utilisées dans le texte.

$2, \frac{1}{6} nc \frac{W}{c} = \frac{1}{3} nW$ . C'est le tiers de l'énergie contenue dans l'unité de volume, comme le veut aussi la théorie électromagnétique et comme l'expérience l'a vérifié.

Le nombre d'atomes de lumière possédant l'énergie  $W$  qui sont situés dans l'élément de volume  $dx, dy, dz$  et dont les composantes de quantité de mouvement sont comprises entre  $p$  et  $p + dp, q$  et  $q + dq, r$  et  $r + dr$ , est donné par la formule suivante de mécanique statistique, encore applicable ici <sup>(1)</sup>,

$$dn_w = C^{te} e^{-\frac{W}{kT}} dx dy dz dp dq dr.$$

Pour obtenir le nombre total d'atomes d'énergie  $W$ , il faut intégrer  $dx, dy, dz$  dans tout le volume, remplacer  $dp, dq, dr$  par  $4\pi G^2 dG$  où  $G$ , est la longueur du vecteur « quantité de mouvement » et substituer à  $G$  sa valeur  $\frac{W}{c}$ .

Ce nombre d'atomes d'énergie par unité de volume a donc pour expression

$$dn_w = C^{te} e^{-\frac{W}{kT}} W^2 dW.$$

L'intégration, pour toutes les valeurs de  $W$  de zéro à l'infini, doit donner le nombre  $n$  des atomes de lumière par unité de volume. Ceci fixe la valeur de la constante et l'on trouve

$$dn_w = \frac{n}{2k^3 T^3} e^{-\frac{W}{kT}} W^2 dW.$$

L'énergie totale  $du$  de ces atomes d'énergie  $W$  par unité de volume est donc :

$$du_w = \frac{n}{2k^3 T^3} e^{-\frac{W}{kT}} W^3 dW$$

Cherchons maintenant à déterminer  $n$ . *Admettons* que ce nombre n'est fonction que de la température; la thermodynamique détermine alors cette

<sup>(1)</sup> Dans la dynamique de la relativité, les équations du mouvement sont toujours canoniques et le théorème de Liouville est toujours valable.

fonction. En effet, l'énergie totale par unité de volume est

$$\int_0^{+\infty} du_W \quad \text{ou} \quad 3nkT$$

car

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{W}{kT}} W^3 dW = k^4 T^4 \int_0^{+\infty} e^{-x} x^3 dx = 6k^4 T^4.$$

Ce résultat attire une remarque. Chaque atome de lumière possède en moyenne l'énergie  $3kT$  et non pas  $\frac{3}{2}kT$  comme cela a lieu pour les molécules d'un gaz ordinaire dont les vitesses sont en moyenne faibles par rapport à celle de la lumière. On retrouve là un fait que la théorie électromagnétique interprète par l'égalité des énergies électrique et magnétique d'une onde lumineuse. Ce parallélisme est atteint par l'emploi des formules de la relativité qui, seules, permettent à la théorie des quanta de lumière d'obtenir la valeur exacte ci-dessus calculée de la pression de radiation, tandis que l'ancienne théorie corpusculaire de la lumière conduit à une valeur deux fois trop forte.

L'énergie totale du gaz est donc  $U = 3nkTV$  et la différentielle de son entropie est

$$dS = \frac{1}{T} (dU + p dV) = \frac{1}{T} \left( 3nkV dT + 3nkT dV + 3kVT \frac{dn}{dT} dT + nkT dV \right)$$

puisque la pression est le tiers de l'énergie par unité de volume.

D'où :

$$dS = \left( \frac{3nkV}{T} + 3kV \frac{dn}{dT} \right) dT + 4nk dV.$$

Pour que  $dS$  soit une différentielle exacte, il faut que

$$\frac{3nk}{T} + 3k \frac{dn}{dT} = 4k \frac{dn}{dT} \quad \text{ou} \quad \frac{dn}{dT} = \frac{3n}{T},$$

dont j'écris l'intégrale sous la forme  $n = Ak^3 T^3$ ,  $A$  étant une constante pour l'instant inconnue. Cette constante est reliée à celle de Stéfan  $\sigma$  car l'énergie par unité de volume est

$$3nkT = 3Ak^4 T^4, \text{ d'où par identification } \sigma = 3Ak^4.$$

Substituons la valeur de  $n$  dans  $dS$ , il vient :

$$dS = 12 Ak^4 T^2 V dT + 4 Ak^4 T^3 dV,$$

d'où

$$S = 4 Ak^4 T^3 V,$$

sans constante, car pour  $T = 0$ ,  $n = 0$ , le gaz n'existe plus.

Puisque  $A = \frac{\sigma}{3k^4}$ , on retrouve l'expression classique  $S = \frac{4}{3} \sigma T^3 V$ .

L'énergie libre  $F = U - TS$  se calcule de suite. Elle est égale à

$$3nVkT - T \cdot 4nkV = -nVkT = -AVk^4 T^4$$

ou encore  $-NkT$  si  $N$  est le nombre total des atomes dans le volume  $V$ . Pas de constante additive car la « masse propre » des atomes est nulle (1).

La quantité d'énergie qu'ont, par unité de volume, les atomes d'énergie  $W$  est

$$du_w = \frac{A}{2} e^{-\frac{W}{kT}} W^3 dW,$$

et puisque  $W = h\nu$ ,

$$du_w = \frac{Ah^3}{2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \nu^3 d\nu.$$

Nous retrouvons donc bien la forme de la loi de Wien. Peut-on prévoir la valeur du coefficient numérique de cette loi (sans se servir naturellement de la valeur expérimentale de  $\sigma$ )?

On peut essayer d'y parvenir par la méthode qui a permis à Planck, Sackur, Tetrode, etc., le calcul de la « constante chimique ». Nous suivrons la marche récemment exposée par M. Planck dans les *Annalen der Physik* [t. 66 (1921), p. 365]. Un gaz étant formé de  $N$  atomes à température  $T$ , la loi de distribution canonique proposée par Gibbs et à laquelle M. Léon Brillouin a donné une base solide en s'appuyant sur la notion de thermostat, conduit pour l'énergie libre à la formule

$$F = -kT \log \left( \sum_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} \right),$$

la somme  $\Sigma$  étant étendue à tous les états possibles du gaz; elle peut s'exprimer par une intégrale étendue à toute l'extension en phase à  $6N$  dimensions, intégrale qui, elle-même, est équivalente au produit de  $N$  intégrales sextuples étendues à l'extension en phase de chaque molécule, si l'on a

(1) Le potentiel thermodynamique  $U - TS + pV$  est identiquement nul.

soin de diviser le résultat par  $N!$  ainsi que M. Planck l'explique dans l'article précité. La théorie des quanta introduit l'hypothèse d'un domaine élémentaire d'extension en phase de grandeur  $g$ ;  $g$  a les dimensions du cube d'une action et le calcul de la constante chimique a conduit à poser  $g = h^3$  ( $h$ , constante de Planck.)

L'expression de  $F$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} F &= kT \log \left[ \left( \frac{\int \int \int \int \int e^{-\frac{W}{kT}} dx dy dz dp dq dr}{g} \right)^N \frac{1}{N!} \right] \\ &= -kNT \log \left[ \frac{eV}{Ng} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{W}{kT}} 4\pi G^2 dG \right] \\ &= -kNT \log \left[ \frac{8\pi eV}{Ng} \times \frac{k^3 T^3}{c^3} \right]. \end{aligned}$$

Nous avons trouvé  $F = -NkT$  sans constante additive car la masse propre des atomes de lumière est négligeable. L'identification des deux expressions exige que le  $\log \left[ \frac{8\pi eV k^3 T^3}{Ng c^3} \right] = 1$  d'où, puisque  $N = Ak^3 T^3 V$ ,

$$A = \frac{8\pi}{c^3 g} = \frac{8\pi}{c^3 h^3}$$

Par suite  $du_\nu$  devient :

$$du_\nu = \frac{4\pi h}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \nu^3 d\nu$$

L'expression diffère par un facteur 2 de la loi de Wien. Cette différence n'est pas due à une erreur de calcul, mais probablement, comme M. Léon Brillouin nous l'a fait observer, à ce qu'on n'a pas introduit dans la théorie précédente la notion de polarisation de la lumière. Une théorie plus complète des quanta de lumière devrait l'introduire sous une forme telle que celle-ci : à chaque atome de lumière serait lié un état interne de polarisation circulaire droite ou gauche représenté par un vecteur axial ayant la direction de la vitesse de propagation. Deux atomes ayant même position et même vitesse, devraient encore, pour être regardés comme identiques dans le calcul de  $F$ , avoir le même sens de polarisation (droite ou gauche); cela introduirait un  $2^N$  sous le signe log dans l'expression de  $F$  et rétablirait la valeur exacte du coefficient numérique de la loi de Wien.

En considérant un mélange de « gaz de lumière » mono, bi, triato-

miques, etc..., on devrait pouvoir aussi retrouver la loi de Planck sous la forme :

$$d u_{\nu} = \frac{8 \pi h}{c^3} \nu^3 \left[ e^{-\frac{h \nu}{k T}} + e^{-\frac{2 h \nu}{k T}} + e^{-\frac{3 h \nu}{k T}} + \dots \right]$$

Ceci exigerait quelques hypothèses assez arbitraires. Nous ne nous engageons pas plus loin dans cette voie <sup>(1)</sup>.

\*  
\* \*

On peut encore arriver à concevoir le gaz d'atomes de lumière de la façon suivante :

Considérons un gaz formé de  $N$  atomes de « masse propre »  $m_0$  en équilibre à la température  $T$ . Supposons applicable à ces atomes la dynamique de la relativité et négligeons toute interaction des atomes; notre gaz est donc parfait. L'énergie et la quantité de mouvement des molécules sont données par les équations :

$$W = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad \vec{G} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \vec{v} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

La mécanique statistique fournit le nombre  $dN$  des atomes dont l'énergie est comprise entre  $W$  et  $W + dW$  (voir ci-dessus),

$$\begin{aligned} dN_W &= C^{te} N e^{-\frac{W}{kT}} G^2 dG \\ &= C^{te} N e^{-\frac{W}{kT}} m_0^2 c \sqrt{\alpha(\alpha+2)} (\alpha+1) dW \end{aligned}$$

en posant pour abrégier  $\alpha = \frac{W}{m_0 c^2}$ . Si la masse  $m_0$  est assez grande pour rendre le quotient  $\frac{W}{m_0 c^2}$  très petit pour la presque totalité des atomes (et c'est ce qui se produit pour les gaz matériels aux températures usuelles), on retrouve la formule ordinaire de Maxwell. Supposons, au contraire, la masse  $m_0$  très petite, alors la presque totalité des atomes auront des vitesses très voisines de  $c$ ; il pourra, par exemple, arriver, si  $m_0$  est assez faible, que le nombre de molécules dont la vitesse diffère de plus d'un millio-

<sup>(1)</sup> Il faudrait sans doute attribuer à l'assemblage de  $n$  atomes de lumière une sorte de probabilité « a priori » égale à  $\frac{1}{n!}$ .

nième de  $c$  soit négligeable;  $\alpha$  sera alors beaucoup plus grand que l'unité et l'on pourra écrire :

$$dN_W = C'e N e^{-\frac{W}{kT}} W^2 dW$$

formule dont on déduit, nous l'avons vu, la loi de Planck-Wien.

L'hypothèse des quanta de lumière conduirait donc, en adoptant la dynamique de la relativité, à regarder les atomes de lumière (supposés de même masse très faible) comme animés de vitesses variables avec leur énergie (fréquence), mais toutes extrêmement voisines de  $c$ . On s'expliquerait ainsi pourquoi la lumière paraît se propager (dans les limites de la précision expérimentale) exactement avec la vitesse qui joue le rôle de vitesse infinie dans les formules d'Einstein (1)

\*  
\* \*  
\*

En résumé, les conclusions essentielles du présent travail sont les suivantes :

1° On peut, par l'hypothèse des quanta de lumière jointe aux règles de la mécanique statistique et de la thermodynamique, retrouver tous les résultats de la thermodynamique du rayonnement et même la loi de répartition de Planck-Wien (2). Toutefois, ces résultats supposent expressément l'emploi, pour les atomes de lumière, des formules de la dynamique de la relativité.

2° Il existe sans doute un lien étroit entre la constante chimique des gaz et la constante de Stéfán du rayonnement noir. Ce lien a déjà été présenté par M. Lindemann dans un travail récent sur la tension de vapeur des solides [*Phil. Mag.*, t. 39, p. 21-25]. Il nous révèle un nouvel aspect de l'interaction constante de la matière et du rayonnement.

Manuscrit reçu le 26 janvier 1922.

(1) La « radiation » de fréquence  $\nu$  serait transportée par des atomes de masse  $m_0$  se déplaçant avec la vitesse  $c - \frac{c^3 m_0^2}{2 k^2 \nu^2}$ , la quantité  $\frac{c^3 m_0^2}{2 k^2 \nu^2}$  échappant aux prises de l'expérience à cause de la petitesse de  $m_0$ .

(2) Sur la question des quanta de lumière, voir : EMDEN. *Phys. Zeitschr.*, 22 (1921), 509 ; — L. DE BROGLIE. *C. R.*, 175 (1922), 811.