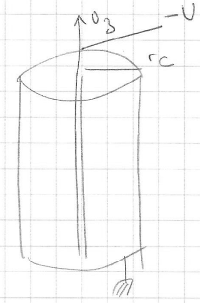
CORRECTION Traitement des fumées industrielles par un électrofiltre (Centrale PSI 2017)

I

IA1) $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Longrightarrow \boxed{\Delta V = 0}$ équation de Laplace

IA2)

a)



On néglige les effet de bord $\Rightarrow$ la source du champ électrique admet une symétrie cylindrique (est invariante par translation // (Oz) et par rotation % (Oz).

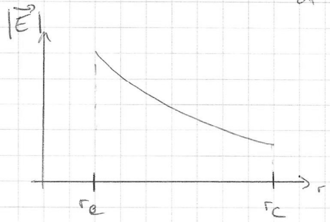
On choisit le système de coordonnés cylindriques d'axe (Oz).
On en déduit donc $\boxed{V(M) = V(r)}$

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0 \implies r\frac{dV}{dr} = A \iff \frac{dV}{dr} = \frac{A}{r}$$

$$\implies V(r) = A\ln r + B$$

$$\begin{cases} V(r_e) = -U \\ V(r_c) = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{V(r) = -U\frac{\ln r/r_c}{\ln r_e/r_c}}$$

b) $\vec{E} = -\vec{grad}\,V = -\frac{dV}{dr}\vec{u_r} = \boxed{+\frac{1}{r}\frac{U}{\ln r_e/r_c}\vec{u_r}}$ (dirigé suivant $-\vec{u_r}$ car $r_c > r_e$)



Au maximum $\boxed{E = \frac{U}{r_e}\frac{1}{|\ln r_e/r_c|}}$

Pour $E = E_0$ il vient $\boxed{U = U_0 = E_0 r_e \ln\frac{r_c}{r_e}}$

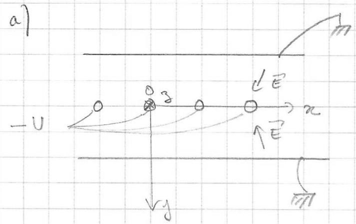
c) AN $U_0 = 4{,}4\;10^6 \times 1{,}25\;10^{-3}\ln\left(\frac{1{,}25}{150}\right)^{-1} = \underline{+\,2{,}6\;10^4\;V}$ (2 cs)

$U_0 = \underline{+\,26\;kV}$

IA3)

$$V(x,y,z) = \frac{U}{\Lambda}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\ln\left(\frac{ch\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)}{ch\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)}\right) \quad (1)$$

a)



- Le plan $\Pi = (Oxz)$ est plan de symétrie pour la source du champ donc plan de symétrie pour V.
  D'où $\underline{V(x,y,z) = V(x,-y,z)}$, ceci est bien cohérent avec l'expression (1)
  $y \to V(x,y,z)$ est une fonction paire

- Si on néglige les effets de bord, il y a invariance de la source par translation // (Oz). D'où $V(x,y,z) = V(x,y)$, ce qui est conforme à (1).

- Il y a également invariance par translation // (Ox) de $2d$ de la source. donc $V(x,y,z)$ doit également être invariant par cette transformation :

  $V(x+2d, y) = V(x,y)$, ce qui est vérifié par (1) (la somme portant sur $m: -\infty \to \infty$)

- La présence des collectrices impose : $V(x,\pm s) = 0 \quad \forall x$

  $$\iff \frac{U}{\Lambda}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\ln\left(\frac{ch\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right) - 0}{ch\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right) + 0}\right) = 0$$, bien vérifié

- La présence de l'émettrice impose $V(r_e, 0) = -U = (0, r_e)$

$$\iff \frac{U}{\Lambda}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\ln\left[\frac{ch\frac{\pi(r_e-2md)}{2s} - 1}{ch\frac{\pi(r_e-2md)}{2s} + 1}\right] = -U$$

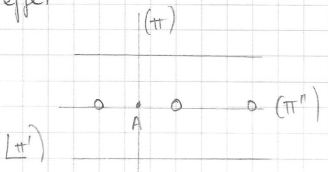
$$\Longrightarrow \boxed{\Lambda = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+\operatorname{ch} X}{\operatorname{ch} X - 1}\right)} \quad \text{avec } X = \frac{\pi}{2s}(r_e - 2md)$$

b) Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants (on suppose $U>0$)

Les zones de fort champ se situent là où les lignes de champs sont plus resserrées (puisque l'on suppose $\operatorname{div}\vec{E} = 0$), au niveau des émettrices.

Le champ électrique s'annule aux endroits où les lignes de champ se croisent (sur le graphique aux points A et B)

En effet



Les plans $\begin{cases}(\pi'') = (Axz)\\ (\pi) = (Ayz) \text{ et } (\pi') = (Axy)\end{cases}$ sont des plans de symétrie de $\mathcal{D}$ et de $\vec{E}$: $\Rightarrow \vec{E}$ appartient donc à leur intersection : $\vec{E} = \vec{0}$ par conséquent.

c) Pour provoquer l'ionisation près de l'émettrice, on veut que le champ électrique au niveau de la surface émettrice soit égal à E_0.

Or en $(x=0, r_e, z=0)$, $\vec{E} \parallel (Oy)$ donc $|\vec{E}(0,r_e,0)| = |E_y(0,r_e,0)|$

en $y = \frac{r_e}{s}$: $\frac{E_y}{U/s} = 22 = \frac{E_0}{U_0/s}$

$$\Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{E_0\, s}{22}}$$ ce n'est pas vraiment une formule littérale

AN : $V_0 = 4{,}4\, 10^{6} \times 150\, 10^{-3}\, \frac{1}{22} = \underline{30 \text{ kV}}$

On obtient le même ordre de grandeur pour U_0 pour les deux types d'électrodes.

I B.

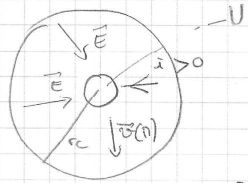
1) $\rho(r)$ $\vec{j}(r)$ $\vec{v}(r) = -b\vec{E}(r)$

La vitesse des anions est suivant $-bE_r\vec{u_r}$ et donc suivant $+\vec{e_r}$ puisque $\vec{E}$ est dirigé suivant $-\vec{e_r}$ (si $U>0$)

Les anions ayant une charges négatives $\vec{j}(r) = \rho(r)\vec{v}(r)$ est suivant $-\vec{u_r}$: le courant $i>0$ circule donc de l'électrode collectrice à l'électrode émettrice.

$$\vec{j}(r) = -\rho(r)\, b\, \vec{E}(r)$$

d'où $\boxed{\vec{j} = -\rho b \vec{E}}$



2) $-i = -\iint_{\substack{\text{cylindre rayon } r\\ \text{hauteur } h}} \vec{j}\cdot \vec{d^2S}$, $d^2S\,\vec{u_r}$ $\Rightarrow$ $\underline{i = \rho b E\, 2\pi r h}$

on suppose que ρ, b et E ne dépendent que de r (symétrie cylindrique)

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{i}{bE\, 2\pi r h}}$$

3) Il s'agit de l'équation de Maxwell-Gauss qui relie la source au champ $\vec{E}$: $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$.

or ici, comme il y a symétrie cylindrique (même en présence du courant), $\vec{E}(r) = E(r)\,\vec{u_r}$. En effet les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ sont plans de symétrie des électrodes et donc de $\vec{E}$ et

$\vec{E}(M)$ appartient à leur intersection : $\vec{E}(M) \parallel \vec{u_r}$.

Ainsi $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{i}{bE\,2\pi r h}$

$$\Longrightarrow \quad E\frac{d}{dr}(rE) = \frac{i}{\varepsilon_0 b 2\pi h}$$

D'où $\boxed{rE\frac{d}{dr}(rE) = \frac{ir}{\varepsilon_0 b 2\pi h}}$

4) On intègre l'expression précédente entre r_0 et r :

$$\underbrace{\int_{r_0}^{r} rE\frac{d}{dr}(rE)\,dr}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dr}(rE)^2} = \int_{r_0}^{r}\frac{i\,r\,dr}{\varepsilon_0 b 2\pi h} = \frac{i}{\varepsilon_0 2\pi b h}\frac{r^2-r_0^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(r^2E^2 - r_0^2E_0^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad E^2 = \left(\frac{i}{\varepsilon_0 2\pi b h}(r^2-r_0^2) + r_0^2E_0^2\right)\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{E(r) = -\frac{1}{r}\left(\frac{i}{\varepsilon_0 2\pi b h}(r^2-r_0^2) + r_0^2E_0^2\right)^{1/2}}$$

5) si $r \to \infty$ $\quad E(r) \simeq -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{i}{\varepsilon_0 2\pi b h}}\,r \quad \boxed{= -\sqrt{\frac{i}{\varepsilon_0 2\pi b h}}}$

AN $\quad E = \left(\frac{1}{8{,}85\,10^{-12}}\frac{1}{2\pi \times 3{,}1\,10^{-4}}\,0{,}70\,10^{-3}\right)^{1/2} = \underline{2{,}0\,10^{5}\ V/m}$

6) $\vec{v}(M) = -b\vec{E}(M) \Longrightarrow \boxed{v(r) = -bE}$ $\quad$ AN $\underline{v = 62\ m/s}$

en $r = r_c$ $\quad \boxed{\rho = \frac{i}{h}\,\frac{1}{bE}\,\frac{1}{2\pi r_c}}$ $\quad$ AN $\rho = -0{,}70\,10^{-3}\cdot\frac{1}{62}\cdot\frac{1}{2\pi}\left(150\,10^{-3}\right)^{-1}$

$$\underline{\rho = -1{,}2\,10^{-5}\ C/m^3}$$

$\boxed{n(r=r_c) = -\frac{\rho(r_c)}{e}}$ $\quad$ AN $\quad n = \frac{+1{,}2\,10^{-5}}{1{,}6\,10^{-19}} = 7{,}5\,10^{13}$ ions$/m^3$

$= \underline{7{,}5\,10^{7}\ \text{ions}/cm^3}$

II $\quad \vec{E_t} = \underbrace{E\vec{u_z}}_{E<0} + \underbrace{\underbrace{E}_{E<0}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\frac{a^3}{r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right)}_{\vec{E_p}} + \vec{E_1}$

$\vec{E_1}$ créé par particule sphérique $Q(t)$ seule

II A 1)

a) Loin de la sphère $\vec{E_p} \to \vec{0}$, $\vec{E_1} \to \vec{0}$ et $\vec{E_t} \simeq E\vec{u_z}$. On peut donc orienter les lignes de champ grâce à cette information (en indiquant l'axe (Oz))

b) cf cours avec théorème de Gauss en symétrie sphérique $\boxed{\vec{E_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}}$

Si on compare les 2 figures :

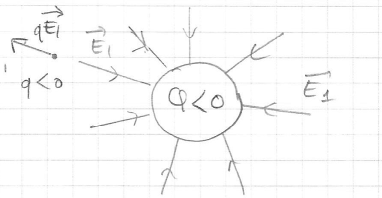
Nombre de lignes de champ partant de la sphère vers des valeurs croissantes de r : N

$Q = 0 \quad N = 11$

$Q < 0 \quad N = 9$

L'accroissement de $|Q|$ a donc tendance à réduire la portion de la sphère d'où partent les lignes de champ ($\Delta_2 < \Delta_1$ sur la figure)

Comme les anions arrivent sur ces lignes de champs, l'accroissement de $|Q|$ s'oppose à l'arrivée de nouveaux anions. Ceci était prévisible puisque le champ $\vec{E_1}$ s'oppose à l'arrivée des anions



si $Q = 0$ $\vec{E_1} = \vec{0}$

si $Q \neq 0$ $\vec{E_1}$ s'oppose à l'arrivée des anions (deux charges <0 se repoussent).

Calculons le champ électrique à la surface de la sphère

$$\vec{E_t} = E\cos\theta\,\vec{u_r} - E\sin\theta\,\vec{u_\theta} + E\,\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\left(2\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\,\vec{u_r}$$

$$= \left|\begin{array}{l} E\cos\theta\left(1 + 2\,\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \\ E\sin\theta\left(\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2} - 1\right)\end{array}\right.$$

Aucune ligne de champ ne part de la sphère si $E_r \leq 0 \quad \forall\theta : \frac{\pi}{2} \to \pi$

$$\Leftrightarrow \quad -E\cos\theta\left(1 + 2\,\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\right) > \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$\underbrace{A\cos\theta}_{<0} > \underbrace{B}_{<0} \quad \forall\theta : \frac{\pi}{2} \to \pi$$

$\Rightarrow$ on doit donc avoir $+E\left(1 + 2\,\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\right) > \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$ car $\cos\theta < 0$

$$\Leftrightarrow \quad Q < 4\pi\varepsilon_0 a^3 E\left(1 + 2\,\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\right)$$

On en déduit Q_{lim} :

$$\boxed{Q_{lim} = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E\left(1 + 2\,\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\right)}$$

d) AN $\quad Q_{lim} = -4\pi \times 8{,}85\,10^{-12} \times (1{,}0\,10^{-6})^2 \times 5\,10^5 \left(1 + 2\,\frac{10-1}{10+2}\right)$

$\underline{Q_{lim} = -1{,}4\,10^{-16}\ \mathrm{C}}$ $\qquad$ $\underline{Q_{lim} = -875\,e}$

II A 2

$$Q(t) = Q_{lim}\,\frac{t}{t+\tau_Q}$$

a) τ_Q fonction de $\varepsilon_0, b, |\rho|$.

On a vu dans I B $\quad [\rho] = \frac{[i]}{[bE]L^2}$ $\quad$ or $\quad [E] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0]L^2}$

$$\Rightarrow \quad [\rho] = \frac{[i][\varepsilon_0]}{[b][q]} = \left[\frac{\varepsilon_0}{b}\right]\cdot\frac{1}{T}$$

D'où $\quad \boxed{\tau_Q = \frac{\varepsilon_0}{b|\rho|}} \quad$ et $\quad \boxed{\tau_Q = \frac{4\varepsilon_0}{b|\rho|}}$

b) $\quad Q(t_{90}) = 0{,}9\,Q_{lim} = Q_{lim}\,\frac{t_{90}}{t_{90}+\tau_Q} \quad \Rightarrow \quad \underline{t_{90} = 9\,\tau_Q = \frac{36\,\varepsilon_0}{b|\rho|}}$

AN $\quad t_{90} = 36 \times 8{,}85\,10^{-12} \times \frac{1}{3{,}1\,10^{-4} \times 5{,}0\,10^{-5}} = 2{,}0\,10^{-2}\,\mathrm{s}$

$= \underline{20\ \mathrm{ms}}$

c) Temps mis par la fumée pour traverser $\tau = \frac{L}{u_0}$

$\tau = \underline{10\ \mathrm{s}} \gg t_{90}$

Les grains de poussière ont le temps d'atteindre leur charge limite largement.

II B

On associe à la particule la vitesse $\vec{v_R}(\Pi) = \vec{u_0} + \vec{w}$

Ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement d'air autour de la particule (avec w vitesse relative de la poussière par rapport à l'air)

$$\boxed{Re = \frac{\rho_{air}\,w\,2a}{\eta_{air}}}$$

Hyp : $Re \ll 1 \Rightarrow$ on peut appliquer la formule de Stockes

$$\vec{f} = -6\pi\eta a\,\vec{v_R}' = \boxed{-6\pi\eta a\,\vec{w}}$$

TCM appliqué à la particule dans le réf des électrodes galiléen :

$$m\,\frac{d}{dt}\left(u_0\vec{e_x} + \vec{w}\right) = QE\,\vec{u_y} - 6\pi\eta a\,\vec{w}$$

$$\Leftrightarrow \quad m\,\frac{d\vec{w}}{dt} = QE\,\vec{u_y} - 6\pi\eta_{air} a\,\vec{w}$$

On en déduit que la particule atteint une vitesse limite $\boxed{\vec{w}_{lim} = \frac{QE\,\vec{u_y}}{6\pi\eta_{air}a}}$

AN : $w_{lim} = \dfrac{1{,}4\,10^{-16} \times 5{,}0\,10^{5}}{6\pi \times 2{,}4\,10^{-5} \times 1{,}0\,10^{-6}} = \underline{0{,}15\ m/s}$

On calcule a posterior $Re = \dfrac{0{,}15 \times 2\,10^{-6}}{2{,}4\,10^{-5}} = \underline{1\,10^{-2} \ll 1}$

Cette valeur numérique justifie a posteriori l'utilisation de la formule de Stockes (cf courbe de C_x en fction de Re donnée à la fin du sujet)

IIC $\eta = 1 - \dfrac{C_2}{C_1}$

1 Nombre de Reynolds associé à l'écoulement de la fumée dans le dispositif

$\boxed{Re = \dfrac{\rho_{air} V_0 \cdot 2s}{\eta_{air}}}$ AN $Re = \dfrac{300\,10^{-3}}{2\,10^{-5}} \sim \underline{1.10^{4}}$, ce qui permet de justifier le caractère turbulent de l'écoulement.

IIC 2)

a) $dN = \left[c(x) u_0 A - c(x+\Delta x) u_0 A\right] dt = \boxed{u_0 A dt \left[c(x) - c(x+\Delta x)\right]}$

b) volume cherché $\boxed{dV = w\,dt\,P\,\Delta x}$ Nombre associé : $\boxed{w\,dt\,P\,\Delta x\,c(x)}$

c) d'où

$$u_0 A dt\, c(x) = u_0 A dt\, c(x+\Delta x) + w\,dt\,P\,\Delta x\, c(x)$$

$$\Rightarrow -u_0 A \frac{dc}{dx}(x)\,\Delta x = w P \Delta x\, c(x)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dc}{dx} = -\frac{wP}{A u_0} c(x)}$$

d) $\eta = 1 - \dfrac{c(L)}{c(0)}$ or $c(x) = c(0)\,e^{-x/\delta}$ avec $\delta = \dfrac{A u_0}{wP} = \dfrac{2sh u_0}{w 2h}$

$\Rightarrow \boxed{\eta = 1 - e^{-L/\delta}}$ avec $\boxed{\delta = \dfrac{s u_0}{w}}$

AN : $\delta = \dfrac{150\,10^{-3} \times 1}{0{,}15} = 1{,}0\ m$ $\eta = 99{,}99\,\% \simeq \underline{100\,\%}$

IIC3

a) $\ell \sim 10^{-7} m$

dans l'approximation des milieux continus, taille particule fluide $\gg \ell$

Pour les très petites particules, cette approximation est mise à défaut.

b) on avait calculé $w_{lim} = \dfrac{Q|E|}{3\pi \eta_{air} \cdot d}$ $w_{lim} \downarrow\ d \uparrow$ pour $d \sim 1\mu m$

On ne retrouve pas cette évolution sur la figure.

Dans les installations industrielles, les poussières n'ont pas forcément toutes la même taille et les mêmes propriétés.

c) $\eta = 1 - e^{-\frac{w' A_c}{D_V}}$ avec $D_V = V_0 A$ $A_c = PL$ si $k = 1$

$\eta = 1 - e^{-\frac{w' PL}{V_0 2sh}} = 1 - e^{-\frac{w' L}{u_0 s}} = \underline{1 - e^{-L/\delta}}$, même résultat qu'avant.

Alors pour w', on devrait avoir $\boxed{w' = w}$.

d) $\eta = 1 - \exp\left(-\left(\dfrac{w' L}{u_0 s}\right)^{k}\right)$

AN $\eta = 1 - \exp\left[-\sqrt{\dfrac{0{,}12 \times 10}{1 \times 150.10^{-3}}}\right] = \underline{94\%}$

Numéro de place

Numéro d'inscription

Signature

Nom

Prénom

CONCOURS CENTRALE·SUPÉLEC

Épreuve : Physique-chimie 1 PSI

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille /

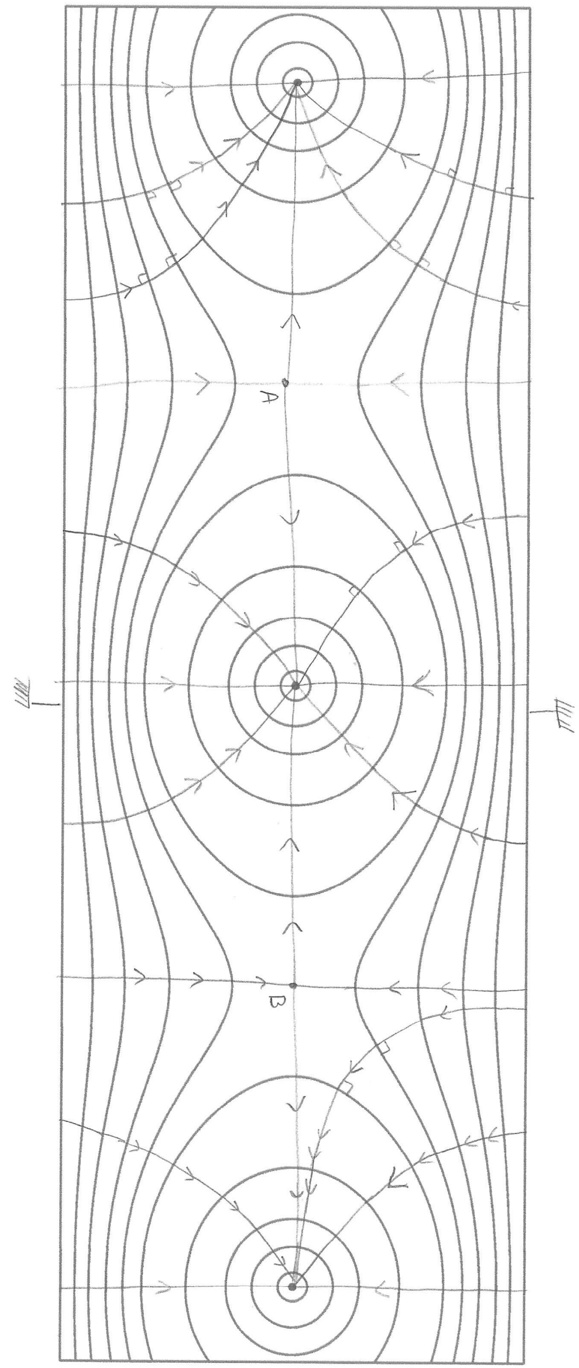


Figure B Carte des équipotentielles dans un électrofiltre sec

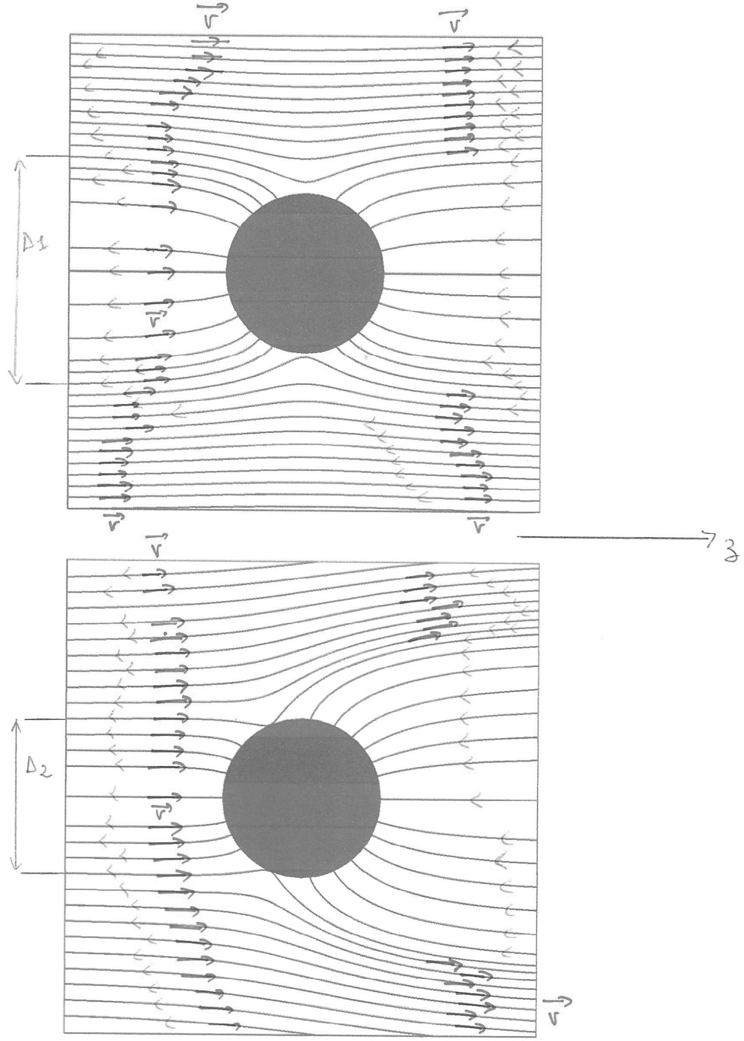


Figure A Lignes de champ autour d'un grain de poussière pour $Q = 0$ (en haut) et pour $Q < 0$ (en bas)