

# PC : programme de la colle 2

## (semaine du 30 septembre 2024)

### Algèbre linéaire

- Somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Base adaptée.
- Matrices par blocs. Produit par blocs. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- Sous-espaces stables, endomorphismes induits.
- Trace
- Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées.
- Interpolation de Lagrange

### Réduction

- Éléments propres.
- Polynôme caractéristique.
- Endomorphismes et matrices diagonalisables.
- Endomorphismes et matrices trigonalisables.

### Questions de cours (démonstrations à connaître)

1. Caractérisation matricielle de la stabilité d'un sev par un endomorphisme.
2. On a  $\dim \sum_{k \in I} E_k \leq \sum_{k \in I} \dim E_k$ , avec égalité ssi la somme est directe.
3. Si deux endomorphismes commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
4. Si  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$ , alors toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .
5. Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme  $u$ , alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe.
6. Dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres.
7. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise celui de l'endomorphisme initial.
8. La dimension d'un espace propre est au plus égal à la multiplicité de la valeur propre associée.
9. Un endomorphisme est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
10. Tout endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable l'est aussi.